Растко Вуковић

МИНИМАЛИЗАМ ИНФОРМАЦИЈЕ

ФИЗИЧКА ИНФОРМАЦИЈА И ПРИМЕНЕ

ИЗДАВАЧ

Економски институт Бања Лука, 2020.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна и универзитетска библиотека
Републике Српске, Бања Лука

519.72

ВУКОВИЋ, Растко, 1957-
Минимализам информације : физичка информација и примене / Растко Вуковић. - Бања Лука : Економски институт, 2020 ([б. м. : б. и.]). - 133 стр. : илустр. ; 30 cm

Слика аутора. - Напомене и библиографске референце уз текст. - Библиографија: стр. 127-128. - Регистар.

ISBN 978-99938-854-7-4

COBISS.RS-ID 128689921

Растко Вуковић
МИНИМАЛИЗАМ ИНФОРМАЦИЈЕ – физичка информација и примене
© Економски институт, Бања Лука, 2020.
https://www.scribd.com/document/421087302/

Лектори и рецензенти:

Душко Милинчић, проф. информатике
Александра Радић, проф. физике
Драгана Галић, проф. математике

Горан Дакић, проф. српског језика

Предговор

Ова књига је непосредни наставак „Физичке информације“ [2]. Идеја заснивања теорије информације на објективној случајности, која је у претходној књизи фокусирана на конзервацију информације, протеже се и даље ка начелном минимализму који је овде обрађиван, али делом и на дејству и јединствености, овде стидљиво помињаним. Исувише је математике у тим тезама да би оне могле бити лако сварљиве, па има смисла „минимализам“ појашњавати чак и у најавама.

Када смо премало информисани онда смо неинформисани, али ако смо превише информисани, тада смо дезинформисани. То је принцип информације који у том облику некако препознајемо. Додамо ли да је „слобода“ врста информације онда и ње може бити премало или превише. Она је фактор „способности“ и „ограничења“ над истим могућностима које се нижу око нас.

Могућности ће боље изразити способнији, нарочито у сложенијим ситуацијама, тешкоћама чију количину меримо „ограничењима“. Доследно томе, укупна слобода је збир производа парова вредности, то је функција која има локални екстрем, неки свој оптимум. Штавише, на пример, макроскопски гледајући, уз претерану способност субјекта интензитет ограничења постаје ништаван заједно са одговарајућом слободом. Слично је и обрнуто, уз велика ограничења, превелике објективне тешкоће, бледеће способности тако да је резултат опет неслобода.

Не знам можемо ли интуитивно осетити да би апсолутно (веома много) способно биће било апсолутно (веома) неслободно исто као и биће апсолутно ограничено тешкоћама. Зато ову тему покушавам третирати не само филозофски, него и формално математички. Други разлог је, наравно, што је историја препуна кафанских теорија и идеја које нису прошле ригорозне математичке провере или касније нису експериментално потврђене. Најчешће ни једно од та два.

Сврха другог дела ове књиге, математичког формализма, јесте и образовна. У време када сам ово писао било је забрињавајуће мало људи који су имали елементарна знања из квантне механике, чак и у случајевима када су били из струка које са том облашћу физике граниче. Тај део је зато компромис уџбеника и (хипо)теза којима сам се тих дана бавио и онда се опет десило да избачених делова има за још једну овакву књигу.

Р. Вуковић, фебруар 2020.

Sadržaj

1 Популарне приче **7**

1.1 Фреквенција . . . 8
1.2 Дарвинова еволуција . . . 9
1.3 Информација перцепције I . . . 11
1.4 Информација перцепције II . . . 13
1.5 Максвелов демон . . . 15
1.6 Комптонов ефекат . . . 16
1.7 Фајнманови дијаграми . . . 18
1.8 Шредингерова мачка . . . 20
1.9 Парадокс близанаца . . . 22
1.10 Бернулијево привлачење . . . 23
1.11 Механицизам . . . 25
1.12 Материјализам . . . 27
1.13 Простор и време . . . 29
1.14 Принцип информације . . . 31
1.15 Димензије времена . . . 32
1.16 Доплеров ефекат . . . 34
1.17 Двоструки отвор . . . 36
1.18 Гомилање историје . . . 38
1.19 Класична сила . . . 40
1.20 Фуријеов развој . . . 41
1.21 Закон великих бројева . . . 43
1.22 Квантни рачун . . . 44
1.23 АПР парадокс . . . 46
1.24 Генерализација ентропије . . . 48
1.25 Спрегнутост . . . 50
1.26 Дирихлеов принцип . . . 51
1.27 Циклус васионе . . . 53
1.28 Атом водоника . . . 55

2 Формализам **57**

2.1 Скаларни производ . . . 58
2.2 Вектори . . . 60
2.3 Дејство . . . 63
2.4 Ојлер-Лагранжове једначине . . . 69
2.5 Ајнштајнове опште једначине . . . 74
2.6 Шредингерова једначина . . . 78

2.6.1 Опште о решењима . . . 80
2.7 Борнов закон . . . 81
2.7.1 Косинуси углова . . . 83
2.8 Тензорски производ . . . 84
2.8.1 Сабирање информација . . . 85
2.8.2 Множење оператора . . . 86
2.9 Кјубит . . . 87
2.9.1 Много светова . . . 88
2.9.2 Примери суперопзиција . . . 90
2.10 Принцип неодређености . . . 92
2.10.1 Неодређености дисперзија . . . 94
2.10.2 Средња квадратна одступања . . . 94
2.10.3 Примена у хемији . . . 96
2.10.4 Избегавање неодређености . . . 96
2.10.5 Примери извођења . . . 97
2.10.6 Оператори импулса и енергије . . . 99
2.10.7 Остали примери . . . 100
2.11 Комптоново одбијање . . . 100
2.12 Експеримент „двоструки отвор“ . . . 102
2.13 Квантна спрегнутост . . . 104
2.14 Антикомутативност . . . 107
2.14.1 Паулијеве матрице . . . 108
2.15 Решавање атома водоника . . . 110

3 Додатак **117**
3.1 O informaciji i vremenu (ili Da li vrijeme zaista teče?) . . . 117
3.1.1 Informacija i vrijeme . . . 118
3.1.2 Logika vremena . . . 119
3.1.3 Razvijanje vremena . . . 120
3.1.4 Kvantna neodređenost i vrijeme . . . 121
3.1.5 Budućnost vremena . . . 122
3.2 Парадокс информације код црних рупа . . . 123

Bibliografija **127**

Indeks **129**

Glava 1

Популарне приче

Увод

Када смо се због (моје) анонимности једном договорили да ово називамо „научно-фантастичним причама заснованим на математици“, додатно можемо говорити и да су оне покушај објашњења света помоћу информације. Приватно речено, немам озбиљних сумњи да ће у будућим временима теорија информације слична овој преовладати у наукама, природним и друштвеним, колико имам бојазни да би таква могла постати догма. Апсурдно је да наука против догме постане догма, али то редовно прети чудној људској нарави.

Иако се не сатирем у популаризацији идеја које следе, приметићете да сам опрезно одговарао на постављена питања или ако зналачки разматрате, да су текстови пажљиво бирани. Тешко је бити идеолог „истине и само истине“ на новим теренима, јер истине воле да се скривају. Зато махере у лагању, у асоцијацијама или одважним одлукама виђамо често „неправедно“ успешнијима од других и као претњу „правим“ истинољупцима својим увредљивим односом према њиховој светињи. Тешим се тиме за понекад и намерне покушаје и промашаје.

Елем, у колумнама које следе пробране су „истине“ настајале самостално или у одговорима на питања која сам архивирао више месеци пре датума објављивања на порталу Извор[1], а скоро цела ова књига писана је годину дана пре лекторисања. Не верујем у долажење до крупних математичких или научних истина кроз јавну полемику, па сам избегавао расправе. Зато је мој први договор са уредником произашао из уверења да мало ко чита овакве прилоге и да они ретки који то буду хтели неће полемисати. Тај портал ми је представљен као место политичких текстова и опозиције која је „зна се“ само трабуњање паса који „лају док каравани пролазе“ (пословица). На жалост, није све испало баш тако.

Основна идеја овде ипак није довршена. Као што је Дарвинова еволуција принцип, а не нешто егзактно доказиво, такво је и начело вероватноће, односно информације. Вероватнији догађаји су чешћи и мање су информативни. Када је нешто извесно, знамо да ће се десити, па се оно и деси, онда то и није нека вест. Поред тога, информација је дејство, производ енергије и времена, па је разлика потенцијалних енергија у пољу силе управо узрокована принципијелним минимализмом информације. Позната или непозната поља сила увек су дакле подручја скаларних информација, а поентирање тога на физичким силама остало ми је за неку следећу књигу.

[1] `http://izvor.ba/`

1.1 Фреквенција

Како то да су догађаји непоновљиви и толико неограничени у овом наводном Платоновом *свету идеја* у којем нема скупа свих скупова, теорије свих теорија, најбољег критеријума, а око себе свугде видимо материјалне, коначне и периодичне појаве?

То би требало бити прво питање теорији која претендује да објасни реалност, а посебно оној која би да поопшти класичну *теорију информације*. Друго питање било би о њеној развојности – од каквог би то могло бити значаја?

Представљање свега информацијом, која је само једна нарочито мерена *количина података*, јесте редукција *перцепција* са оном посебном апстрактношћу која јој даје ширину својствену математици. Отуда су могући следећи, колико једноставни и брзи, толико и неочекивано дубоки закључци.

Информација је (локално) јединствена, јер ми (као и честице) размењујемо поруке зато што немамо све што нам треба. Због истог, узрок комуникације је *непредвидљивост*, егзистенција објективне неизвесности, па супротно уобичајеном веровању да прошлост знамо, а будућности се надамо, боље видимо последице него узроке. Нису само наше перцепције замућене неодређеностима, него је овај свет тако и устројен.

Чаша на столу се налази баш на том месту где је, јер је то њен највероватнији положај, а због истог он ће то бити и у следећем тренутку, осим ако на чашу не делује нека сила и помери је. *Сила* мења вероватноће, мења енергију (рад силе на путу) предмета, мења наше перцепције о предметима (рад силе на путу за дато време) и сведочи да сличне претпоставке доводе до сличних непосредних последица (не тачно једнаких). Тако разумемо да физичка тела гледамо кроз информације, да је тај „свет информација“ еквивалентан материјалном, да је једнако потпун и непротивречан.

Закон одржања количине материје преноси се на конзервацију информације, а принцип најмањег дејства материје на еквивалентан *принцип минимализма* информације. Из првог следи њена коначна дељивост (бесконачан скуп може бити еквивалентан свом правом делу за разлику од коначног). Из другог следи да се свакој информацији може приписати неко дејство.

Зато што је информација увек коначно дељива, њено ограничено мноштво увек је коначно, па је коначан и број свих комбинација тог мноштва. Пре или касније оно се понавља, а слично води непосредно сличном, па су све материјалне појаве *периодичне*. Сама периодичност, пак, врста је информације, макар као информација о информацијама. То је одговор на прво горње питање. Друго ће бити јасније кроз примене.

На пример, посматрајмо економију модела тржишта *Курноа*[2]. Роба на тржишту о којој је говорио може бити гориво, тканина, млеко, свеједно је, све док је исте врсте и док јој јединична цена углавном пада повећањем понуде. Он је својевремено о томе писао потпуно непознате радове, савременицима претешке који су тек век касније признати и уврштени у тада откривену теорију игара. Објашњавати Курноа без формула сматра се немогућим, али вреди покушати.

Производ цене и продате количине је укупан *приход*, а сви остали трошкови су *расход*. Разлика прихода и расхода је *профит*. Како се повећањем количине засићује тржиште, смањује се (јединична) *цена* и успорава се раст укупног прихода, а расход константно расте, па профит има неки свој *оптимум* у односу на количину. Након оптимума, повећањем производње, пословање иде у минус, расте губитак фирме.

[2] Antoine Cournot (1801-1877), француски математичар.

Када је фирма сама на тржишту кажемо да има *монопол* (дате робе). Када две фирме конкуришу око исте робе то се назива *дуопол*, а када их има више назив је *олигопол*. *Конкуренција* (дуопол или олигопол) производи и додатно снижавање цене у борби фирми за пласманом, па се догађа да би монополска фирма на тржишту постигла оптимум са мање робе и већом ценом од оптимума фирми у конкуренцији. Другим речима, монопол је добар за произвођача, конкуренција за друштво.

На датом тржишту сваки од произвођача има неки свој оптимум производње зависно од понуде осталих. Када је та понуда премалена за капацитет тржишта, произвођач може повећати производњу и приход, а ако је та понуда превелика, ићи ће у губитке. Тај оптимум количине робе је *равнотежно стање*, односно (често покретан) центар осциловања конкурената, са променљивом мањом и већом понудом у одређеним периодима времена.

Неки у тој „игри осциловања“ отпадају, други се појављују. Стање равнотеже произвођача, у односу на тржиште и робу, назива се Курно-Нешов *еквилибријум*. Оно што је додатно интересантно су саме поменуте периодичне појаве, утолико занимљивије што је њихова примена овде новина.

Свака *осцилација* везана је за неку информацију, а свака информација за неку осцилацију. Додатно приметимо да и „информација о информацијама мноштва“ такође може бити елементарна. Затим да је информација дејство (промена енергије за дато време), што значи да се елементарним информацијама и њиховим периодима увек могу додефинисати „енергије“, тако да су ови производи константни, квантовани.

Другим речима, наводна *енергија* пропорционална је *фреквенцији* промена (обрнуто је пропорционална периоду), као и рецимо енергија таласа-честице светлости (фотона) где се електрично и магнетно поље смењују индукујући једно друго кретањем.

Ово запажање постаје практично када се уместо сложених односа предузећа у конкуренцији пређе на третирање њихових фреквенција кружења око еквилибријума. То је аналогија са енергијама у физици за које знамо да се могу просто сабирати, па интерференција наизглед излази изван *физике*. Као што *математика* својим моделима помаже физици, физика сада може помоћи математици, а обе *економији*, биологији, социологији. На крају се отвара питање колико су ове области заправо различите?

Свет је устројен неодређеностима
`http://izvor.ba/`
10. јула 2019.

1.2 Дарвинова еволуција

Дарвинова[3] еволуција иде у прилог теорији физичке информације, јер признаје изборе. Тако констатује један анонимни колега, па ме пита: Има ли нешто у тој новој теорији што би ишло у прилог Дарвиновој еволуцији? Ово питање води до тешке теме и важног позитивног одговора за саме основе теорије физичке информације и надам се да ћу га знати занимљиво елаборирати.

Теорију физичке информације заправо сматрам математичком теоријом, али је моделирам према принципима конзервације, минимализма и јединствености информације који је (обострано једнозначно) пресликавају на материјални свет. За дефиницију

[3] Charles Darwin (1809 - 1882), британски научник.

живота довољна су само прва два, али је само први од ових принципа мање-више познат науци, може се рећи, јер је још увек тема проверавања.

Подсетићу да се у закон одржања (конзервације) информације до недавно претежно сумњало, па је и сам чувени Стивен *Хокинг*[4] својевремено тврдио да *црне рупе* „једу информацију“, јер снажна гравитација коју та небеска тела стварају не дозвољава да ишта из њих излази, па ни светлост.

Хиљаде научних радова тада су „потврђивали“ идеју неконзервације информације, на пример, позивајући се на папир са текстом који запалимо и информацију текста уништимо заувек. Тек је недавно познати физичар *Саскин*[5] објаснио зашто црне рупе не поједу информацију, а објашњење је прихватио и сам Хокинг.

Укратко, док тело пада ка *хоризонту догађаја* црне рупе, релативно време му успорава до нуле и једнако се скраћују радијалне (ка центру гравитације) дужине, а сам процес траје бесконачно дуго. Извана посматрано, тело тежи да постане *дводимензионална* слика на сфери око црне рупе, никада не одлазећи у оностранi свет. Његова 2-Д информација, сама суштина његове материје, у свој својој почетној количини стално остаје са нама. То би био космолошки доказ конзервације.

У квантној механици, *квантна стања* (скупове честица) представљамо векторима тзв. *Хилбертовог простора*, а промене (физичке еволуције) тих стања – *унитарним операторима*. Поента је у томе да су унитарни оператори линеарни, јединични и реверзибилни, што значи да се променама квантних стања одржавају многе величине константним, а међу њима и информација. То би требало бити довољно, јер *квантна механика* је данас најтачнија грана физике, па према томе и најтачнија теорија коју имају природне науке уопште.

Међутим, рекох да „математичка теорија физичке информације“ заправо и није теорија физике, па за њу доказивање физичким експериментима не важи. Зато наглашавам да је квантна механика репрезентација Хилбертове алгебре апстрактних векторских простора, а поменути унитарни оператори због реверзибилности обезбеђују симетрију квантних стања (пре и после деловања), а затим, према *Нетеровој теореми*[6], ако имамо симетрију, онда имамо и одговарајући закон одржања. И то је то.

Конзервација информације и интуитивно је видљива. Наиме, ако би информација могла настајати ни из чега и нестајати ни у шта, онда не бисмо могли веровати физичким експериментима. Прошлост не би била научно истражива, она би се тек тако мењала са настајањем и нестајањем информација. Памћење би било бесмислено и губила би смисао комуникација уопште.

Толико о конзервацији информације. *Минимализам информације* следи, узмимо, из става да се највероватнији догађаји најчешће реализују, а такви су најмање информативни. Наиме, када знамо да ће се нешто десити и то се деси, то онда и није нека вест. Минимализам у физици видимо у спонтаном расту ентропије термодинамичког система, када се молекуле гаса уређују међусобно (уједначавајући међусобне удаљености) смањујући комуникацију према вани, на што извана гледамо као повећање нереда. Брже ширење полуистина од истина друштвеним мрежама или лакше кодирање него декодирање, такође су последице шкртарења природе емисијама информације.

Исти минимализам је и својеврсна штедљивост која акумулира информацију. Може се доказати (моје теореме из [2]) да је „физичке информације“ све више у односу на

[4]Stephen Hawking (1942-2018), енглески физичар.
[5]Leonard Susskind (1940-), амерички физичар.
[6]в. Физичка информација [2], Еми Нетер.

„техничку“ (класичну, Шенонову) што је систем сложенији. Отуда *живо биће* због своје физичке сложености може имати информације у вишку.

Тела се вишкова своје информације настоје отарасити (исти принцип минимализма), али то не иде лако, јер је сва околна супстанца попуњена. Жива бића тако спонтано умиру на рате кроз интеракције, предајући информацију неживим тварима у повољним догађајима, или се решавају вишка организујући се. Овом спонтаношћу људи старе или се одричу личне слободе (информације) у корист друштвене организације. Буквално можемо рећи да нас живот и правни систем убијају. Живот је желео да настане тако како није желео да настане, а тај дуализам специфичност је информације, принципа њеног минимализма. Још једном помињем, још увек непознатог у науци.

Управо то спонтано гомилање информације у мање сложене облике живота, а затим пренос информације из мање сложених индивидуа у сложени колектив, који еволуцијом може (али не мора) постати ново сложеније живо биће, јесте важна карика која је недостајала Дарвиновој еволуцији. Конзервација информације и принцип минимализма су покретачке „силе“ еволуције живота, јер би само голо насумично одабирање тежило нереду, а не високо организованим животним формама.

Умиремо спонтано и на рате
`http://izvor.ba/`
19. јула 2019.

1.3 Информација перцепције I

Информација перцепције је посебна врста количине опција коју појединац може доживљавати. Она је мера његове способности развојности – скраћени је одговор на питања о значењу „чудног“ наслова моје истоимене књиге [10]. Посматрана апстрактно та формула може рећи више о односу нас са светом или о комуникацији супстанце уопште – од сваке своје конкретне репрезентације. Покушаћу то објаснити.

Довољно је да имамо макар какве опције и већ можемо дефинисати *интелигенцију* као способност бирања. За разлику од резултата IQ теста, исти појам даље обухвата обе, наследну и стечену, способност манипулације могућностима. И даље он дозвољава њену пластичност, прилагодљивост, али и примену на несвесне вештине. Перцепције укључују опажања из несвесног, па је нова дефиниција интелигенције у том смислу доследна.

Индивидуална способност бирања је ограничена и коначна. Њене границе назовимо *хијерархијом*. За ограничења која појединцу намеће околина можемо користити и друге изразе, али у сваком случају подразумевамо да она потичу од законодаваца, друштвених норми, нагона, природних закона. Такође, унутар сваке од наведених или сличних забрана, слобода једног лица ограничена је одговарајућом слободом других. Свака могућност баратања исходима једног делује на исту неког другог, јер су исходи конзервирани. Као неизвесности, исходи чине (физичку) информацију и подвргавају се закону одржања.

Интелигенција је директно пропорционална *слободи*, а обрнуто хијерархији. Прво каже да интелигенција (у просеку) тражи свој комодитет у већим слободама (количинама опција). Ово препознајемо код живих бића као избегавање скучених стања индивидуа или еволуције врсте у нове могућности у процесу адаптације на околину ради бољег коришћења ресурса. Код неживих исто видимо у избегавању сувишних емисија информације (из неизвесности и уопште), у начелу шкртости, њеном принципијелном

минимализму. Отуда је информација перцепције, односно слобода коју јединка може да искуси, једнака производу њене интелигенције и хијерархије.

Овде је занимљива *Ремзијева* (Frank Ramsey) теорема која тврди да не постоји нулта хијерархија. Парафразирам, ма како се насумично распоређивали облаци на небу, пре или касније појавиће се неки унапред задати облик или ма како насумично распоређивали слова и речи у текст увек постоји шанса да добијемо неку унапред дату реченицу. Ова теорема је откривена почетком 20. века са развојем теорије графова. Уз претпостављену објективност могућности, она сада утврђује непостојање нулте слободе и нулте интелигенције.

Објективност избора подразумева различитости, а оне независности неких појава. Зато поменута формула, информација перцепције, мора бити сложенија. Најмање што мора, она садржи поједине слободе као производ одговарајућег пара износа интелигенције и хијерархије. Ти производи затим учествују у укупној информацији перцепције као збир, због закона конзервације. Не „баждаримо“ ове „износе“ ради веће општости, али можемо користити примере.

Способност Цезара када је прелазио Рубикон 49. године п.н.е. била је супротстављена закону Римског сената који је такав прелаз забрањивао. Што је већа снага забране и што је већа способност Цезара, то је већи њихов производ и већа *животност* Цезара (у том случају), односно већа је његова одговарајућа компонента (сабирак) информације перцепције.

Сличан пример су снаге игре такмичара и опонента у неком надметању. Тада опет можемо рећи да „слобода“ игре расте пропорционално вештини играча и отпору опонента, богатству избора, па је исправно сматрати једноставнијим играма оне које траже мања умећа. Сабирајући све поједине слободе у укупну информацију перцепције, налазимо форму скаларног производа, овде вектора интелигенције и хијерархије. То је још једна разлика између нове и класичне дефиниције интелигенције – ова је вектор (низ), а стара је скалар (број).

Зато што је (укупна) информација перцепције јединке мање-више ограничена количина, али је интелигенција пластична, у условима константне хијерархије, ако редукујемо своје опције у једним доменима, оне ће се покушати проширити у неким другим, попут свеже кобасице која стиснута на једном крају екплодира на другом. У прилог томе биће менаџер који води крут и досадан живот у мање важним стварима, а показује повећану успешност и креативност у другим. Сагласно овоме, моногамија и њени патријархални механизми успешније су стварали цивилизацију управо због врсте своје рестриктивности.

Коначно, размотримо још једну чисто рачунску особину поменутог скаларног множења низова на нерачунски начин. Поредајмо компоненте низа (вектора) информације у растућем редоследу, а хијерархије у опадајућем, па множимо редом парове и све поједине производе саберимо. Овако множећи, мањи са већим и већи са мањим, добијамо мању информацију перцепције од сваког другог распоређивања, множења и сабирања. Максималну вредност имаћемо када множимо веће компоненте једног низа са већим другог и мање са мањим. То такође има своје практичну интерпретацију.

Минималну информацију перцепције (слободу) имају мртве ствари, предмети изучавања физике. Сви они подвргнути су познатом *принципу најмањег дејства*, најмање могуће потрошње енергије да се из једне тачке дође у другу, или најмање потрошње времена у датим околностима. То би била „жива бића“ која се пуштају као кладић низ воду. Такви млитавци се већим препрекама мање супротстављају, за разилку од пркосног Цезара који је радио управо супротно.

Зато информацију перцепције има смисла називати животност. Опште ускраћивање опција које долази од страха од неизвесности, као потреба за сигурношћу, стабилношћу, или ефикасношћу, сада постаје гушење развојности, а у условима иначе ограничених перцепција, дугорочно оно води паду опште интелигенције. То све видимо из те једне апстрактне формуле. Ако је она тачна.

Објективност избора подразумева различитости
`http://izvor.ba/`
26. јула 2019.

1.4 Информација перцепције II

Слободом називаш збир производа одговарајућих *способности* и *ограничења*, а такође и *количину опција* алудирајући на *техничку информацију*, количину неизвесности – детаљ је из мог разговора са колегом – али каква је веза између те две дефиниције? Ево објашњења.

Техничку дефиницију информације открио је 1928. године *Хартли*[7] радећи у Беловој телефонској компанији. Он је приметио да је *логаритам* броја једнако-вероватних података боља мера количине неизвесности од сваке друге скале и посебно од непосредног броја могућности.

У бацању новчића два су исхода, у бацању коцке шест, а у бацању оба 12, дакле не збир него производ броја опција, а логаритам производа једнак је збиру логаритама. Логаритам је једина тако адитивна фукција, па је Хартлијева дефиниција била пун погодак. Телефонска компанија могла је почети „бројати“ проток података једнако коректно као водовод воду или електро-компанија потрошњу струје.

Из адитивности логаритама следи да је логаритам јединице нула, па је толика и информација извесности. Фер-новчић даје два равноправна исхода, сваки са вероватноћом половином да би збир обе дао јединицу и извесност. Сигуран догађај у бацању фер-коцке је нека од шест могућности, па свака има вероватноћу шестину.

У десет неких једнаких могућности свака има вероватноћу десетину, број реципрочан броју десет, а производ десет и реципрочног од десет (шест и шестине, два и половине) јесте један, па је логаритам десетине једнак минус логаритму десет. Отуда, Хартлијева информација је минус логаритам вероватноће. Променом базе логаритма само се мењају јединице мере информације.

Инверзна функција логаритамској је експоненцијална (исте базе). То значи да једна другу поништавају, тако да је логаритам *експонента* броја једнак датом броју. Према томе, ако је дати број поменути производ, способности и ограничења, сабирак слободе, онда је његов експонент одговарајући „број опција“ за Хартлијеву информацију. Реципрочна вредност „броја опција“ је нека средња вредност вероватноће „опција“, а њен негативан логаритам опет иста информација. У томе је ствар!

Поједини производ одговарајуће „способности“ и „ограничења“ дефинише компоненту (сабирак) „слободе“, њен експонент дефинише „број опција“, а логаритам тог броја опет је иста полазна „слобода“. Међутим, у томе се да препознати и Хартлијева информација. Све постаје кристално јасно када се формуле ставе на папир, али понешто се разуме и овако.

Славна *Шенонова*[8] дефиниција информације дошла је двадесет година након Харт-

[7] Ralph Hartley (1888-1970), амерички инжењер.
[8] Claude Shannon (1916-2001), амерички математичар.

лијеве, од стране исте компаније. Једноставно речено, Шенон је посматрао неједнако вероватне исходе, поделио их на групе једнако вероватних и свакој групи доделио Хартлијев логаритам, а затим узео средњу вредност логаритама по расподели вероватноћа. У техници та средња вредност је нашла велику примену и проузроковала експлозију развоја компјутера. Али Шенонова информација није физичка, јер не прати закон одржања као Хартлијева[9].

Зато користим побољшање Шенонове дефиниције које подржава закон одржања и које називам *физичком информацијом*. Она је за сложенији систем већа од Шенонове, што се показује сагласно *принципу минимализма*, па онда и са акумулацијом информације, а коначно и са дефиницијом „живог бића“.

Са друге стране, упоредо са развојем класичне теорије информације настајала је и квантна механика. Важно откриће из 1927. године, које управо сазнајемо да их спаја, биле су *Хајзенбергове*[10] *релације неодређености*. У изворном облику оне кажу да производи неодређености мерења импулса и положаја честице, односно енергије и времена, никада нису мањи од (реда величине) *Планкове*[11] константе.

Тај производ је *дејство*, овде „слобода“ или Хартлијева информација, да би рецимо простор честице била њена „способност“, а импулс њено „ограничење“. Држимо ли се математичке форме, јасно је да ћемо даље добијати једнако непротивречне ставове поменуте „слободе“, тј. физичке информације, као што их имају физичка дејства.

Да за физичко дејство важи закон одржања, следи из његовог квантовања и константности. Пошто је дејство информација, његов експонент је вероватноћа. За разлику од управо додефинисане информације, у квантној механици је познато да поменути експоненти представљају вероватноће квантних стања, а оба векторе у Хилбертовом простору, односно скупове честица у физици. Ствари се даље компликују зато што компоненте вектора квантних стања не иду уз реалне него уз *комплексне бројеве*, али то сада добија смисао.

Само одговарајући изрази ових комплексних вектора када су реални бројеви постају физички мерљиве величине, тзв. *обзервабле*, сагласно мојој теореми о дискретности (коначној дељивости) сваког својства информације. Поред тога, степени и логаритми комплексних бројева су периодичне функције, што је у складу са (мојим) тврђењем да су све информације периодичне појаве.

Није новост да за координате квантних стања бирамо искључиво обзервабле, физичке величине које можемо мерити, да би пројекције вектора на њих биле резултати мерења исказани вероватноћама. Оне су компоненте *суперпозиције*, како се називају могућности исхода квантног мерења датог стања, а сада само додајемо да вероватноће мерења долазе од информација или неизвесности које имају квантна стања. То су оне „слободе“ са почетка овог текста, које називамо „информацијом перцепције“.

Неспоразуми нових са вековним старим тумачењима ових термина долазе из њихове раније свакодневне употребе, из недоследности, често нетачног и контрадикторног њиховог претходног разумевања, а не из математике која стоји иза свега. Та исправка значења управо је један аспект напретка науке.

Степени, логаритми и обзервабле
`http://izvor.ba/`
2. августа 2019.

[9] Детаљно је разматрано у књизи „Физичка информација“ [2].
[10] Werner Heisenberg (1901-1976), немачки теоријски физичар.
[11] Max Planck (1858-1947), немачки теоријски физичар.

1.5 Максвелов демон

„Максвелов демон“ је мисаони експеримент чувеног Џејмса Кларка *Максвела*[12] из 1867. године о другом закону *термодинамике*: топлотна енергија (топлота) спонтано прелази са тела више на суседно тело ниже температуре, никада обрнуто. То је било у веку открића молекула и сазнања да већа брзина њиховог кретања значи већу *топлоту* и *температуру* тела којег чине.

Елем, замишљамо демона као човечуљка који контролише преграду између два дела собе, две просторије са неком напредном, нама непознатом, физиком и технологијом. Он пропушта брзе и само брзе молекуле из прве собе у другу, а споре и само споре из друге у прву.

Ако су у почетном стању топлота и температура ваздуха у собама биле једнаке, прва соба постајала би временом све хладнија, а друга све топлија. Дакле, демон би топлоту из хладније собе слао у топлију, упркос другом закону термодинамике. Топлотна разлика између соба могла би дати нови *користан рад* и демон би био кандидат за *перпетуум мобиле*, за неограниченог произвођача енергије.

Термодинамику је основао француски војни физичар Сади *Карно*[13] анализирајући 1824. године замишљену топлотну машину максималне ефикасности. Дошао је до закључка да произведени рад (енергија) не може бити већи од уложеног и да само у „идеалном“ случају њих два могу бити једнаки, а таквог нема у пракси. Мора бити да енергија цури кроз зидове посуде, приметио је.

Ове кружне термодинамичке процесе даље је посебно пажљиво анализирао немачки математичар Рудолф *Клаузијус*[14] да би 1854. године објавио свој чувени рад о терији топлоте у којем је установио поменути други закон термодинамике, држећи за први да енергија може мењати своје облике, али не и укупну количину.

Занимљива је његова скраћеница, количник топлоте и температуре, коју је он назвао *ентропијом* (грч. окренутост ка унутра), до тада потпуно непознатом, а коју је обилно користио у формулама. Тој смени варијабли, ентропији, Клаузијус никада није дао неки физикални значај, али је приметио да њена вредност остаје константна у идеалном Карноовом кружном циклусу и да се повећава у реалном. Касније је ентропија називана количином нереда насталог титрањем молекула (*Болцман*[15], 1877), па и информацијом (*Шенон*[16], 1948).

Вратимо се Максвеловом демону. *Ландеур*[17] је 1960. године уочио да термодинамички реверзибилни (повратни) процеси не повећавају ентропију, али по цену да информације о молекулама не смеју бити брисане. *Бенет*[18] је даље показао (1982) да демон пре или касније мора остати без простора за складиштење информација и почети њено брисање које ће овај процес учинити иреверзибилним (неповратним) проузрокујући пораст ентропије. Доказао је да губитком информације кружни систем губи енергију, постаје неповратан и расте му ентропија!

Додатна, недавна израчунавања (Бенет, 1987 – *Сагава*[19], 2012) показала су да

[12] James Clerk Maxwell (1831–1879), шкотски математичар и физичар.
[13] Sadi Carnot (1796-1832), француски инжењер и физичар.
[14] Rudolf Clausius (1822 – 1888), немачки физичар и математичар.
[15] Ludwig Boltzmann (1844-1906), аустријски физичар и филозоф.
[16] Claude Shannon (1916-2001), амерички математичар.
[17] Rolf Landauer (1927-1999), немачко-амерички физичар.
[18] Charles Bennett (1943-), амерички физичар.
[19] Sagawa, Takahiro (2012). Thermodynamics of Information Processing in Small Systems. Springer Science and Business Media. pp. 9–14. ISBN 978-4431541677.

би демон произвео више ентропије бавећи се молекулама него што би је елиминисао раздвајајући их по собама. Другим речима, више енергије треба за оцењивање и селективно пропуштање молекула од оне која би се добила температурном разликом соба. Све ово значи да демон није могућ, да су Клаузијусови закони тачни и да је пред термодинамиком научна будућност.

Приметимо да повећање ентропије праћено губитком енергије сада можемо свести на *принцип информације* (минимализма): природа шкртари са информацијом. Топлота спонтано одлази од тела више ка телу ниже температуре, јер се на тај начин смањује емисија информације. Једноликим распоређивањем молекуле собе постижу унутрашњи ред на уштрб губитка вањске комуникације који опажамо као неред, а то је такав процес супстанце против којег нема лека.

Да се повећањем ентропије умањује емисија информације видимо на следеће начине. Број комбинација једноликог распоређивања молекула много је већи од начина њиховог нагомилавања, па у случају да су сви распореди једнако вероватни, много су вероватније равномерне комбинације. То је објашњење које је истраживао Болцман. Из тежње тим више вероватним даље следи да природа тежи мање информативним стањима.

Друго, знамо да насумичним бирањем речи из речника добијамо текст у нереду, неинформативан, док би бројањем речи неког разговора нашли статистички значајно различите фреквенције (број појављивања) појединих речи. Када би те речи слагали водоравно (дуж апсцисе) по опадајућој висини фреквенције, у првом случају (безличног текста) добили бисмо приближно хоризонталну линију висина, у другом случају (смисленог текста) имали бисмо опадајућу криву линију.

Слушајући и бројећи сигнале (рецимо звучне) које испуштају животиње (делфини), према облику поменуте криве, ако је она опадајућа, знали бисмо да они разговарају иако тада уопште не бисмо значи о чему. Слично је са једноликим распоредом молекула ваздуха у соби који нам је извана гледајући безличан, неинформативан. То је стање које се добија повећањем ентропије када кажемо да расте неред, игноришући пораст унутрашње уређености. Тада, заправо, расте унутрашњи ред, а смањује се вањска комуникација.

Потрага за узроком (извором) појма енергије овде је једва покренута поентом на начелу (минимализма) информације, иначе универзалним за све физичке појаве. То начело тек треба да буде видљиво, па у савременој физици још увек различито третирамо информације (механичке, термодинамичке, електричне). Претпоставка је да оно заједно са законима одржања указује на још дубље везе између енергије и информације.

Топлота Максвеловог демона
`http://izvor.ba/`
8. августа 2019.

1.6 Комптонов ефекат

Невероватно је колико се *информација перцепције* меша у све – сумњичаво ме пита колега информатичар, иначе електроинжењер. Одговарам: као и компјутери који више нису само ствар алгебре логике и електричних прекидача.

Не изненађује нас физика атома када их користи за своја истраживања, па ускоро неће ни информатика када у принципијелним теоријским истраживањима зађе у природне науке. Право чудо било би да се преклапање ових теорија никада не десе и да већ сада немамо неку претечу таквих сусрета.

Једна од новооткривених веза физике и информатике полази од добро истраженог расејања *фотона* (таласа-честица светлости) у сударима са *електронима*. То се већ учи у средњој школи као Комптонов ефекат. Појаву губитка дела енергије судареног фотона са увећањем таласне дужине предвидео је и описао амерички физичар Артур *Комптон*[20] 1922. године разматрајући дуалност таласних и честичних особина електромагнетног зрачења за што је добио Нобелову награду за физику 1927. године. Искористићу је да скренем пажњу на фине методе теорије информације.

Формула коју је Комптон својевремено открио предвиђа да x-зрака таласне дужине 0,02 нанометара, ако погоди електрон у мировању и одбије се под углом од 30 степени, повећа своју таласну дужину за око 16 одсто, а да тада електрон одлети под углом 73,5 степени, брзином око шест одсто брзине светлости.

Када се исти фотон одбије под углом 45 степени његово увећање таласне дужине износи више од 35 одсто, а електрон се одбија под углом 65 степени брзином близу 10 одсто брзине светлости. Резултати слични овима су мерљиве величине и многи су до данас пажљиво проверавани и потврђивани.

Када након судара са електроном фотон скрене са свог правца кретања, продужи му се талас, повећа му се размазаност. То је смањење одређености положаја фотона и смањење густине вероватноће налажења фотона на датом месту, а тиме и повећање одговарајуће информације – констатујемо додатно.

С обзиром на то да природа чешће реализује више вероватне догађаје, што значи мање информативне, доследно томе фотон би радије наставио своје претходно праволинијско кретање у складу са принципом (минимализма) информације. Из истог, силе и судари узрокују промене релативних вероватноћа, а онда и праваца кретања.

Уопште, тела се крећу *инерцијално* (једнолико праволинијски), јер прелазак у неинерцијални или други инерцијални систем кретања виде као прелазак у стања веће емисије информације у стања себи мање вероватна. Та друга, релативна стања повећане комуникације за њих су стања мање *ентропије*, јер ентропија расте смањењем емисије информације ка вани, па због тежње за већом ентропијом тела остају у стањима мировања или једноликог праволинијског кретања све док на њих не делује неко друго тело или сила.

Поремећај максимума ентропије система у једноликом кретању очитава се релативистичком контракцијом дужина у правцу кретања и одсуством те промене окомито на правац кретања, дакле нехомогеношћу. Слично је и у *гравитационом* пољу. За разлику од сателита који приликом инерцијалног кретања слободно пада у сопственом бестежинском стању, гас у соби која мирује вуче гравитација.

Он је због тежине гушћи ниже, а то је релативно смањење ентропије са становишта сателита. Сателит би спонтано прешао у већу ентропију када би релативну ентропију у јачој гравитацији видео већом (приговор теорији која би релативну ентропију сматрала већом) и једноставно би напустио своје инерцијално кретање и пао у јаче поље.

Усклађеност класичних закона физике са (новом) теоријом информације видимо свуда. Расипање, а не стапање фотона и електрона у Комптоновим сударима класично предвиђамо бирајући координате у којем резултирајући електрон мирује. Тај процес гледан уназад у времену дао би емисије фотона (енергије) из мирних електрона који затим одлазе са већом енергијом (за кинетичку), што је немогуће према закону одржања енергије. Аналогно у теорији информације, електрони у мировању не емитују информацију због принципа минимализма. Другом приликом видећемо да ова ситуација

[20] Arthur Compton (1892-1962), амерички физичар.

разјашњава још неке разлике, пре свега сложених и елементарних система, такође са становишта информације.

Комптоново расипање у складу је са Хајзенберговим *релацијама неодређености* (1927), а оне са информацијом перцепције. Наиме, погађајући непокретне електроне тврђим зракама светлости (краћих таласних дужина) прецизније им одређујемо положај, али веће је расипање импулса, као и обрнуто. Тежећи већој одређености импулса електрона посматрамо их мање прецизним фотонима. Најмањи производи ових неодређености, импулса и положаја (као и енергије и времена), реда су величине Планкове константе и представљају најмања физичка дејства.

Ако је импулс електрона „ограничење“, а положај „способност“, Хајзенбергов производ неодређености је сабирак „слободе“ у збиру „информације перцепције“. Она је окосница (нове) теорије физичке информације, а овде то само напомињем.

Архимедова[21] „способност“ била је супротстављена „тежини“ проблема тестирања златне круне када је он нашао да тело потопљено у течност бива лакше за онолико колико износи тежина истиснуте течности. Архимед је за тако неоштећену круну краља Сиракузе *Хијерона II*[22] завештану храму проверио да је од чистог злата и да златар није преварио краља користећи сребро које је јефтиније.

Производ две величине опет је компонента „слободе“ као у случају релација неодређености, али пркосно формиране у већу укупну „информацију перцепције“ него оне у случају принципа најмањег дејства. Па кажемо да Архимед има већу „животност“ од самих честица физике.

Било би чудо да будући научници оваква мешања своје струке са методама теорије информације не примете и да их не хтедну користити. На крају, попут геометрије и алгебре, тачне теорије сагласне су не само са сопственим деловима, него и међусобно.

Неоштећена круна краља Сиракузе
`http://izvor.ba/`
16. августа 2019.

1.7 Фајнманови дијаграми

Славни *Фајнман*[23] на чијим су уџбеницима квантне механике одрастале генерације врхунских физичара аутор је по њему названих дијаграма.

Он је био толико поносан на своје једноставне и апсурдно ефикасне скице интеракција квантног света да их је стављао испред свих осталих својих постигнућа. Тај нобеловац за физику их је цртао на комбију којим би ишао на пецање, по зидовима, на мајицама, јавно се дивећи њиховој несхватљивој тачности.

Интеракције квантне механике сводимо на елементарне честице које се деле на *бозоне* и *фермионе*. У прве спадају носиоци сила (гравитационе, електромагнетне, слабе и јаке), а друге су честице на које те силе делују.

Спин (унутрашњи моменат импулса) првих је целобројан, спин других увек је нека половина. Два или више бозона могу бити у истом квантном стању, а код фермиона то није могуће. Ова забрана, *Паулијев принцип искључења*, чини да су начини понашања те две врсте честица битно различити. На Фајнмановим дијаграмима све фермионе

[21] Архимед (287. п. н. е. — 212. п. н. е.), старогрчки математичар из Сиракузе на Сицилији.
[22] Хијерон II (? - 215. п. н. е.), краљ Сиракузе од 270. п. н. е. до 215. п. н. е.
[23] Richard Feynman (1918-1988), амерички теоријски физичар.

представљамо пуном линијом, Хигсов бозон испрекиданом, фотоне, W и Z бозоне испруженом, глуоне обично таласастом линијом са повратним завојима.

Електрони (негативно наелектрисани фермиони) стварају електрично поље око себе стално испуштајући *виртуелне фотоне.* Када виртуелни фотон са једног електрона погоди други електрон, он постаје реалан и због *закона одржања* изврши се пренос енергије и импулса. Попут слободних чамаца на мирној води који ће се удаљавати када из једног пребацујемо вреће песка у други, електрони се одбијају.

Тако описујемо оно што видимо на одговарајућем Фајнмановом цртежу. Квантна механика, као и класична (за разлику од статистичке), у својим једначинама дозвољава *инверзију времена* (замену предзнака тока) и тумачење електричног привлачења електрона и *позитрона* (анти-електрона) обрнутим смером њихових времена уз одговарајућу Фајнманову сличицу.

У језгру атома налазе се електрично позитивни *протони* који се такође привлаче са негативним електронима, а одбијају од позитивних позитрона, па се ове сличице аналогијом успешно преносе даље и на такве случајеве, као и на све остале познате интеракције, при чему интерпретација постаје све чуднија. Тиме долазимо до питања уклапања теорије информације у ове представе.

Када други електрон од првога преузме виртуелни фотон, он добија информацију. Простор ка првом електрону постаје више информативан и он спонтано „бежи“. Природа не воли информацију иако је сва од ње саздана. Други електрон се због тог принципа минимализма информације одбија од првог, али и он емитује поље виртуелних фотона за слично одбијање.

Не комуницира све са свачим, али је овде могућ пренос спина $+1$ фотона са првог електрона спина $+{}^1\!/_2$ на електрон спина $-{}^1\!/_2$, када први остаје са спином $-{}^1\!/_2$, а други постаје са спином $+{}^1\!/_2$, поред неких комбинација које нису могуће.

Када честица путује празним простором, она „разговара“ са *вакуумом.* То је прилика за ослобађање од вишка информације настале гомилањем њене прошлости, али и нужност, опет због принципа информације. Тако се фотон пуни и празни информацијом, поред можда још неких других начина „таласања празнине“, чинећи те суфиците и дефиците интересантнима (видљивим) различитим учесницима.

Тамо где електрон види суфицит информације позитрон види дефицит и обрнуто, па након интеракције са истим фотонима од електрона се одбијају електрони, а привлаче му се позитрони. То је допуна објашњења Фајнманових дијаграма.

Прост рачун[24] показује да није могуће једноставно одбијање електрона одскакивањем фотона између њих попут пинг-понг лоптице. Оно се неће сложити са *Кулоновом*[25] силом (законом опадања електричног одбијања са квадратом растојања). Исправан рачун даће сферно ширење виртуелног фотона, сфера по сфера из првог електрона, при чему је интеракција тих сфера са другим електроном случајан догађај (није нужност), шанси опадајућих са квадратом полупречника. Те сфере су површине, а информација је *дводимензионална* – покушаћу једном приликом објаснити.

Попут концентричних кругова таласа све мањих мрешкања док се шире површином воде, *амплитуде* виртуелних сфера опадаће са површином сфере, а њихове таласне дужине остајаће непромењене. Смањење амплитуде говори о паду вероватноће интеракције, а константност таласних дужина о непромењеној неодређености положаја и потенцијално пренешеног импулса.

[24] в. [4], слика 1.14 и текст

[25] Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806), француски војни инжењер и физичар.

Након интеракције са другим електроном, када виртуелни фотон постане реалан и из сферног стања пређе у честично, сва околина првог електрона постаје незасићена. Тај мањак информације попуњава се из првог електрона или рецимо подстиче прелазак из фиктивног у реално стање и интеракцију виртуелних сфера другог електрона са првим, убрзавајући супротни смер исте интеракције. Ова синхронизација преноса између електрона доводи нас на корак до „фантомског“ феномена, како је деловање на даљину назвао Ајнштајн открививши га 1935. године.

Овде би се могла догађати и *спрегнутост* квантних интеракција зависних случајних догађаја. Додамо ли је објашњењу Фајнманових дијаграма, први електрон не реагује на присуство другог све док другог не сустигне виртуелни фотон првог и не реализује се, а онда, тек онда, дешава се узајамна интеракција. То би била *ретроактивна* размена енергија, импулса и спина два електрона, алтернативна вероватносном објашњењу компензацијама наизменичним разменама виртуелних фотона.

Због великог значаја фантомске „заплетености“ (quantum entanglement) за теорију информације, њихове повезаности за сада непознате физици, можда и о њој нешто испричам неки други пут.

Дијаграми са Фајнманове мајице
`http://izvor.ba/`
23. августа 2019.

1.8 Шредингерова мачка

Шредингерова мачка спада међу најпознатија предања модерног квантног света, приче којима се увек нешто може додати. Смислио ју је *Шредингер*[26] за расправе у *Копенхагену* да нагласи различитост појава микро од макро физике.

Мачка је у кутији, каже се, у којој је неки случајни догађај може усмртити, а затим отварамо кутију и сазнајемо да ли је мачка жива. Парадокс настаје ако сматрамо да је у претходном стању мачка била и жива и мртва или ни жива ни мртва, а сазнањем она постаје само једно од та два.

Пре свега, ради се о изношењу законитости физике малих величина у наше размере. Као када мрава, који може подићи терет 50 пута тежи од себе, замишљамо великог попут слона и онда фантазирамо о слону који са лакоћом носи више од 20 тона. Ово није могуће, јер маса расте са кубом висине тела, површина са квадратом, а мало је тога линеарно са дужином. У нашој је природи да се безбрижно дивимо бојама, али у природи малог чак и судар са најмањим парчетом светлости био би нам фаталан. Смањивањем тела мењају се физичке особине.

Када се након Планка, Ајнштајна и још неколико генијалаца 1924. године међу теоретичарима квантне механике појавио *Луј де Број*[27] са идејом да сва материја има и таласна својства (интерференције, дифракције), доминантна у микро-свету, Шредингер се први латио оловке и дефинисао математику такве хипотезе.

Убрзо је, 1926. године, сковао своју чувену таласну парцијалну диференцијалну једначину и дефинисао фантастични свет Де Броја. Зачудо, решења његове једначине почела су се експериментално потврђивати, једно по једно без изузетка. Шредингер је

[26] Erwin Schrödinger (1887-1961), аустријски физичар.
[27] Louis de Broglie (1892-1987), француски физичар.

својим открићем квантној механици и армији експерименталних физичара у лабораторијама по којима су они до тада тумарали мраком дао запрепашћујуће моћну теоријску алатку.

Он је био свестан да је његова теорија испред праксе, да ће га конкретна испитивања само потврђивати и журио је да у новој области отплива што даље. У многим научним радовима које је тада објављивао успешно је тумачио изводе своје једначине, али се можда најтеже хрвао са парадоксалном *суперпозицијом*, тада новом појавом и неотклоњивом у решењима. То је најчешће место на којем се тумачење квантне механике збрзи и које треба појаснити.

Квантна механика је толико математичка да је у експерименталним предвиђањима збуњујуће тачна и прецизна, а свакако да је због истог и неконтрадикторна. Она је репрезентација прво диференцијалног рачуна (Шредингера), па матрица (Хајзенберга) и унитарних простора (Хилберта). Она је сва у анализи, алгебри, теорији вероватноће, увек са истим конкретним завршницама и то „у длаку“. Математичарима је то нормално и нећемо о томе.

Оно што је наизглед чудно је теорема алгебре да се свака поливалентна логика (тачно, можда, нетачно) може свести на двовалентну (тачно, нетачно) и шта сада да радимо са неотклоњивим суперпозицијама стања? Само наизглед, као шест стања коцке пре бацања која након бацања увек, али баш увек колабирају (израз квантне физике) у само једно од њих. Додатно, тренутак колабирања је „неухватљив“, па је и то мучило Шредингера.

Копенхагенска интерпретација, формулисана од Бора и Хајзенберга 1927. године, данас је стандардно тумачење квантне механике. Оно одбацује питање попут „где је била честица пре мерења њеног положаја“ као бесмислено. Чином мерења суперпозиција више могућности реализује се у један исход, односно из неизвесности настаје информација – додао бих.

Неизвесност се умањује тачно за онолико колико информације из ње настаје, а тај процес је насилан, покреће га мерење, интеракција са мерним уређајима. То су (моја) информатичка тумачења. Прво долази из закона одржања информације због чега је и неизвесност врста информације, а друго из принципа минимализма природе око мењања стања информације.

Сва материја састоји се само од података, а њихову количину меримо таквом информацијом за коју важи закон одржања, па отуда квантовање. Наиме, за разлику од бесконачности чији прави део може бити количином једнак целини, свако својство информације, због закона одржања, коначно је дељиво (такође мој став).

Даље, сваки коначни скуп има коначно много комбинација, а слични узроци воде сличним непосредним последицама (не увек и крајњим), па су информатичке појаве физике увек периодичне, али и обрнуто, свака периодичност појаве додатна је њена информација. Материја се састоји само од информација и ето објашњења феномена Шредингерове таласне једначине.

Коначно, информација је еквивалент дејству, најмање кванту дејства (производ неодређености енергије и времена) и према томе – ако је мачка велике масе, она је веома велике енергије, па је преображење те енергије веома краткотрајна појава.

Нема она тада чега да се сећа када је угледамо у кутији, јер је њен процес колабирања из суперпозиције трајао веома незнатно да не постоји начин за мерење нечега тако краткотрајног, а камоли за „доживљај“. Тек веома, веома лагана „мачка“ имала би дужу неизвесност прошлости да бисмо могли говорити о фантомском деловању садашњости на прошлост, дакле о *ретроактивном* деловању помињаном у прошлом прилогу.

Вратимо се на класичне интерпретације квантне механике. Копенхагенској се замера што „неће Месец нестати док га не гледамо!“ (аргумент Ајнштајна), а онда долазе и питања објективности мноштва неизвесности (суперпозиције) пре „гледања“ у појаву. Зато је Хју *Еверет*[28] 1957. године формулисао *вишесветовну интерпретацију* квантне механике. По њему су и жива и мртва мачка постали реални, али у раздвојеним реалностима и нема ефективне комуникације или интеракције међу њима. У информатици, сада су обе ове интерпретације два дела исте теорије.

Постоје и другачије хипотезе, а стално настају и нове. Овде поменута „информатичка интерпретација“ кандидат је међу таквима.

Длака Шредингерове мачке
`http://izvor.ba/`
30. августа 2019.

1.9 Парадокс близанаца

Хипотеза бога науци није потребна. Осим ако кажемо: „Бог је истина“. После чега би атеисти математичари били у проблему. Могли би рећи: Бог воли да се крије, али не воли да се сакрије. Томе у прилог иде принципијелни минимализам информације и дуално објективност увек макар некакве неизвесности. Такође, тешкоће и парадокси науке, а са друге стране наши успеси у њој.

Уместо уобичајене критике *теорије релативности* на основу њених парадокса, овде поступамо обрнуто. Уважићемо да је она експериментално потврђена скоро до десете децимале килограма, метра и секунде. Признаћемо да је теорија релативности након квантне механике нешто најпровереније што физика данас има и да је у том смислу врх наука уопште, а онда погледати шта нам њени парадокси даље поручују. А међу првима је чувени *парадокс близанаца*.

Ајнштајнова специјална теорији релативности објављена је 1905. године. Постулирано је да су сва кретања релативна и да важе исти закони физике за сваког од посматрача инерцијалних система. Други постулат каже да је брзина светлости у вакууму константна, независна од брзине извора. Последице су универзално сопствено време (посматрача мировања) и успорен ток времена у релативном систему (посматрача кретања).

Замислимо сада два брата близанца – једног који остаје у првом систему (на Земљи) и другог који се једнолико праволинијски удаљава и након неког путовања једнако тако враћа назад. Када су два брата поново заједно, парадокс каже да је свеједно који је од браће мировао, па је први више остарио од другог и уједно други је више остарио од првог. Али, када се они опет нађу на истом месту видеће се да нису могућа оба тврђења!

Сам Ајнштајн је својевремено дао разрешење ове ситуације указујући да се путник морао окретати, успоравати па убрзавати, нарушавајући инерцијално кретање. Зато што је један од браће напуштао једнолико кретање нема равноправности њихових стања и нема поменуте противречности. Нећемо сумњати у ово објашњење него ћемо га употребити још даље.

Док се други систем удаљава од првог релативно време му тече спорије све више заостајући у прошлости у односу на садашњост првог. Након смањивања брзине због

[28] Hugh Everett III (1930-1982), амерички физичар.

окретања и враћања назад, опет због споријег тока времена, други систем је стално у будућности првог. Разлика између две садашњости је све мања до поравнања исходишта и сусрета браће када та разлика исчезава. Део сопственог времена путника релативни посматрач са Земље не види. Укупно протекло сопствено време дуже је трајало од релативног за део који релативни посматрач не види, који је у односу на њега, сада кажемо, отишао у *паралелну реалност*.

Међутим, успорени релативни проток времена производи *виртуелне* енергије (вакуума) у реалне које сопствени посматрач не види. Успоравањем времена производ неодређености енергије и времена расте, неке виртуелне честице постају реалне, са њима и виртуелна дејства, па такође и виртуелне информације. Релативни посматрач сада опажа тачно толико нових виртуелних информација колики део сопствених се од њега сакрио у „паралелној реалности".

Теорија релативности, Хајзенбергове релације неодређености и закон одржања информације овим су сасвим синхронизовани, али сада тумачења тек почињу.

Нестајање дела сопствених информација у „паралелној реалности" у односу на разне релативне посматраче може се одвијати у три *димензије*. Наиме, у свакој појединој равни простор-времена Минковског, иначе геометријској подлози Ајнштајнове теорије, релативна временска оса се нагиње у правцу кретања. Како постоје три димензије простора, постоје и три димензије кретања, те су нагињања временских оса могућа такође у три димензије, па временских димензија има колико и просторних.

Ова вишедимензионалност времена, која је иначе карактеристична за (моју) теорију информације[29], новост је за физику. Напомињем да се различите димензије времена не разматрају чак нити у *теорији струна*. То је још увек хипотетичка грана физике која уједињује познате силе и третира простор на десет димензија, али са стално једном те истом временском осом.

Принципијелно *скривање информације*, сада откривено у „паралелним реалностима", виђамо и у чешћој реализацији вероватнијих догађаја (мање информативним), у лакшем кодирању него декодирању, бржем ширењу лажи од истина друштвеним медијима и мрежама. Са друге стране, из егзистенције „паралелних реалности" следи егзистенција објективних *случајности*, а из ове теорија информације, тако да су и ове три (хипо)тезе такође у сагласју.

На крају, то је још само једна од многих потврда да „истина воли да се крије, али не воли да се сакрије".

Два брата, обадва (не)једнака!
`http://izvor.ba/`
6. септембра 2019.

1.10 Бернулијево привлачење

Било које три тачне теорије једнако су непротивуречне са својим деловима као и међусобно. Знамо тако преносити теореме геометрије на алгебру и вероватноћу или обрнуто, али је поучно то откривати на динамици *флуида* (течности или гасова), релативистичком кретању и принципу информације. Пре пар година такву једну расправу наметнуо ми је колега сумњајући да се гране природних наука могу лако повезивати као што то радимо у математици.

[29] због претпосављене објективности опција

Главни део те расправе је у тада штампаној књизи „Простор-време“ [8], а овде ћу покушати да отуда пренесем неколико занимљивих детаља и можда бар још једно неиспричано откриће. Идеја повезивања која следи дошла ми је из мало познатог *парадокса возова*, однекуда као наводног доказа неисправности теорије релативности. Наравно, нећемо се обазирати на забавне „мудре дедукције“ (мени непознатог аутора), него ћемо ту занимљиву почетну конструкцију искористити да завиримо мало даље у теорију релативности.

Прича каже овако: два воза равномерних једнаких брзина мимоилазе се. Простор између њих тако је отворен да ваздух може слободно прелазити. Знамо да флуид који струји усисава околну супстанцу, а то каже и једначина из 1738. године *Бернулија*[30]: привлачење флуида расте са квадратом његове брзине, поред још неких овде небитних величина.

То значи да би посматрач из купеа првог воза требао приметити кретање свог ваздуха ка другом, а да противуречно томе посматрач из другог воза тврди симетрично – да опажа супротно кретање – излазак ваздуха из свог вагона. Доследно даље, за посматрача извана који стоји на насипу поред возова, два кретања ваздуха, из вагона у вагон, поништавају се.

Бернулијева једначина је неспорна. Она се лако доказује пуштањем течности кроз цев различитих профила (па зато и брзина) на којима су бочно постављени отвори са мерачима притиска. Њену примену видимо и у авио индустрији у конструкцији *крила авиона* са дужим горњим профилом којим ваздух струји брже него доњим, због чега *потисак* авиона на горе расте са квадратом брзине авиона. Потисак зависи и од површине крила, аеродинамике, од густине ваздуха, али такве параметре сада можемо занемарити.

Специјална теорија релативности је такође неспорна. Она се изводи из само два добро проверена приниципа, релативности кретања и константне брзине светлости, из чијих последица извлачимо побољшања рада разних техничких направа. Рецимо ГПС (глобални позициони систем) полази од сателита којима се урачунава контракција дужина и дилатација времена прво због инерцијалног кретања по орбити, а онда и због гравитационог поља. Тај ефекат тачно је пропорционалан порасту кинетичке енергије тела у кретању, који при мањим брзинама (у односу на брзину светлости) прима одавно познату вредност производа половине масе и квадрата брзине тела. Зачудо, овде додајемо, иста сразмерност важи и за Бернулијеву једначину!

Вагон се релативно скраћује само по правцу кретања, а његова запремина смањује се тачно онолико пута колико се повећава Бернулијево привлачење. Зато се та два ефекта поништавају, јер пораст притиска стиснутог ваздуха ка вани у равнотежи је са Бернулијевим повлачењем ка унутра. Другим речима, управо смо пронашли још једно извођење чувене Бернулијеве једначине, сада помоћу специјалне теорије релативности.

Следеће питање је: где је ту принцип информације? Погледајте прво мој претходни прилог о парадоксу близанаца. У релативном систему (покретном) време тече спорије него у сопственом (непокретном), па виртуелне честице (енергије, дејства и информације) постају реалне. Оне ничу у тачно оном износу који је потребан да се намири губитак информације због одласка дела покретног система у *паралелну реалност*. Можемо рећи да успоравање времена гура део система у паралелну реалност (недоступну релативном посматрачу) што због закона одржања извлачи *виртуелне информације* у реалне (недоступне сопственом посматрачу).

[30] Daniel Bernoulli (1700-1782), швајцарски математичар и физичар.

Теоријски, када бисмо слој по слој имали све бржа кретања концентричних сфера док прилазимо њиховом заједничком средишту појавио би се ефекат централног гравитационог поља, бар што се тиче успоравања времена. Бернулијева једначина каже да би тада било и *усисавања* супстанце ка исходишту сфера. Успоравање времена, дакле, еквивалент је том привлачењу, а како је сва материја сачињена од информације, то овде говоримо о „усисавању информације“.

Исти феномен постаје познатији ако ствари посматрамо обрнуто, на равној подлози која се окреће око једне тачке. Даље од осе обртања тангенцијална брзина (окомита на полупречник) расте, па расте притисак супстанце ка вани, сада можемо рећи – Бернулијев притисак. Међутим, те силе „усисавања“ већ су нам познате као центрифугалне, а знамо да оне постоје и када нема (видљиве) супстанце. *Центрифугална сила* је сила самог простора и времена! Она једнако делује на простор време и материју, форме информације, па је зато она заправо феномен саме информације.

Када вакуум не би располагао виртуелним дејствима, која би се успоравањем времена могла преводити у реална, онда би био нарушен закон одржања (количине) информације или би *гравитациона сила* морала бити много јача. Принципијелно речено, мањак информације је привлачан као што је вишак одбојан.

На тај начин гледајући, динамика флуида, теорија релативности и принцип информације као да су делови једне те исте, неке за сада рецимо непознате, веће теорије.

Ваздух Данијела Бернулија
`http://izvor.ba/`
13. септембра 2019.

1.11 Механицизам

Немачки астроном и математичар Јохан *Кеплер*[31] био је међу првима који су се егзактније бавили небеским телима.

Од 1609. до 1619. године он је откривао законе који данас носе његово име: први, да се планете крећу по елипсама у којима је једно од (два) жаришта Сунце; други, да потез Сунце-планета (радијус-вектор) у једнаким временским размацима пребрише једнаке површине; трећи, квадрати опходних времена планета пропорционални су кубовима њихових средњих удаљености од Сунца. Тако је почела ера *механицизма*.

Са њима је и италијански математичар Галилео *Галилеј*[32] који је бацајући предмете са кривог торња у Пизи 1654. године открио да би сва тела падала истим убрзањем ако не би било отпора ваздуха. Док су други тврдили да је за кретање потребно стално гурање тела, Галилеј је поред наведеног схватио и закон инерције.

Свим таквим открићима класичне механике уопште шлаг на торту дао је енглески математичар *Њутн*[33] у књизи „Принципа“ (лат. Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica) штампаној 5. јула 1687. године. Он је, склањајући се од епидемије куге 1665. године у Вулсторп Мејнор, своје родно место северно од Лондона и Кембрица где је изводио већину нама познатих експеримената (рад на оптици), такође, наводно посматрајући јабуку како пада са дрвета, добио идеју о сили гравитације.

Као добар математичар Њутн је из Кеплерових закона извео да гравитационо привлачење опада са квадратом удаљености. Био је по природи мистик и није видео

[31] Johannes Kepler, 1572-1630.
[32] Galileo Galilei, 1564-1642.
[33] Isaac Newton, 1642-1727.

проблем у простирању силе кроз чврста тела, нити у тренутном деловању на даљину. Посматрајући воду у лавору како се просипа док се лавор окреће, одлучио се на апсолутни простор. Само бављење таквим експериментом указује на тешкоће које је Њутн опажао у Галилејевој инерцији, са системима у једноликом праволинијском кретању (инерцијалном) у којем би сви закони физике требали бити инваријантни (одговарајући исти).

„Принципи“ Њутна остављали су дубоки утисак на све касније истраживаче природе, а њихова екстремна способност предвиђања која произилази из формула, прецизност и уопште детерминизам као да су их зачарали. Филозофски есеји о вероватноћи Пјера Симона *Лапласа*[34], последњег од водећих математичара 18. века то потврђују. Они полазе од схватања да нам вероватноћа треба само зато што нисмо добро обавештени, а његова чувена реченица резиме је тадашњег механичког материјализма:

„– Ум који би знао све у датом моменту активне силе природе, као и релативни положај свих честица који је чине и уз то био довољно обиман да би све те податке могао подвргнути математичкој анализи, могао би обухватити једном формулом кретање како највећих тела у васиони тако и најситнијих атома у њој; за њега не би било ништа неодређено и он би подједнако јасно видео како будућност, тако и прошлост. То савршенство, које је људски разум био у стању да да астрономији, још увек је слаба представа о таквом уму.“

Дубље разматрање конзистентности вероватноће открило би први несклад Лапласовог механичког концепта већ са самим његовом најпознатијим трактатом (Аналитичка теорија вероватноће). Лаплас је ту детаљно размотрио хазардне игре, геометријске вероватноће, Бернулијеву теорему и њену везу са интегралом нормалне дистрибуције, као и теорију најмањих квадрата коју је пронашао Лежандр. Упадљиву доследност оваквих разматрања крунисао је 1933. године *Колмонгоров*[35] откривши аксиоме вероватноће и заснивајући је као грану математике.

Да нешто више има у тој „необавештености“ због које се можемо поуздати у *теорију вероватноће* указивао је и развој статистичке физике у 19. веку, али прави шок је дошао са открићем детерминистичке *теорије хаоса*, на прелазу из 19. у 20. век. Она је откривена и заснована на системима чије незнатне почетне варијације постепено прерастају у веома различита стања какве су метеоролошке појаве. Буквално, најмање зрнце прашине могло је да поквари и заустави савршенство *класичне механике*. Са друге стране, знало се да и највећа стабилност рада система може произаћи из закона великих бројева теорије вероватноће.

Десило се да нико од великих истраживача није покушао искористити ту погодност вероватноће да је она грана математике. Већ у 18. веку био је познат проблем *Буфонове*[36] игле, формула вероватноће за случајно падање игле на под са нацртаним тракама и начин (закон великих бројева) како са бројем бацања игле резултат опита прилази све тачнијој вредности формуле. Зато што формула садржи можда најпознатији ирационални број – пи (3,14159...) повећањем броја бацања тај број добијамо са све већом тачношћу, а на сличан начин и много другога. Те сагласности са математиком нема рецимо статистика. Обрнуто, несагласност вероватноће и математике указала би на неслучајност појаве.

Дакле, неко се могао досетити да каже: па добро, због необавештености о свему

[34]Pierre-Simon Laplace (1749-1827), француски математичар.
[35]Колмогоров, Андрей Николаевич (1903-1987), руски математичар.
[36]Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707-1788), француски математичар.

што се догађа са гравитацијом ослонићу се на теорију вероватноће, јер она је тако доследна да ће засигурно бити у складу са будућим налазима који ће се заснивати на бољим сазнањима и детерминизму. Не успем ли опет добро, доказао сам детерминизам Њутнове механике. Није се досетио нико, јер је доба механицизма било на свом врхунцу.

Слично је и са другим физичким појавама о којима немамо апсолутну обавештеност. За чашу испред себе рекли бисмо: она је ту на столу, јер је у датим околностима то њено највероватније стање и резултат је великог мноштва. Највероватнији исходи принципијелно најчешће се догађају, па је чаша и у следећим тренуцима на истом месту, све док се не појави нека сила (рука) и премести је. Према томе, сила мења вероватноће. Скретање сателита (тела у слободном паду) са сопствене трајекторије са становишта сателита мање је вероватно. То би следило из пуке сагласности вероватноће са математиком!

У време *Хартлијевог* открића информације 1928. године, поменути принцип вероватноће постао би принцип информације: мање информативно је чешће. Тада бисмо могли рећи да тела слободно падају избегавајући да комуницирају. Али, на то се морао чекати цели век.

Планете, јабуке и вероватноћа
`http://izvor.ba/`
20. септембра 2019.

1.12 Материјализам

У време мојих првих новијих текстова о гравитацији водио сам преписке са колегама из разних струка. Оне о *материјализму* су тада знале бити интересантније од саме главне теме и, по савету једног од њих, ево тих занимљивијих делова у првом плану. На жалост, само неке од тих расправа сам сачувао, а већину морам реконструисати по сећању.

Дискусије су се водиле око три питања. Зар је *вероватноћа* грана математике, а статистика није, да ли се на основу теорије вероватноће могу извести релативистичке једначине гравитације и зашто то и Ајнштајн није урадио? Претпоставите да је одговор на друго питање позитиван (био сам у стању доставити потврде), али о томе ћу вам можда накнадно причати.

За разлику од разних небулоза, па и природних наука и статистике, вероватноћа јесте грана математике, јер су њени докази преносиви у математичку анализу, алгебру, геометрију. Појаснићу то на примеру.

Бацамо *фер-новчић* док не падне писмо. Да се писмо деси у првом бацању, вероватноћа је $^1/_2$. Ако се деси у другом бацању, прво је пала глава, затим писмо, па је вероватноћа $^1/_4$. Ако се догађај оствари у трећем бацању, десио се низ исхода ГГП вероватноће $^1/_8$. То писмо у другом бацању није исто што и писмо у трећем и уопште догађаји у овом низу сви су независни. Њихове вероватноће се сабирају. Пре или касније писмо ће пасти, па у бесконачном збиру разломака имамо све могуће исходе, што значи да је њихов збир јединица – вероватноћа сигурног догађаја.

Да је збир бесконачног низа оваквих разломака, половина од половина, јединица, може се доказати и алгебарски без помињања вероватноће. То је та способност преноса доказа коју нема статистика због чега кажемо да статистика није, а вероватноћа јесте грана математике. Питагорина теорема се не доказује експериментима, па ни екпери-

менталне науке нису гране математике, мада је експеримент такорећи доказ контрадикцијом, основним оруђем математике.

Зато има смисла прогласити се необавештеним у питањима механике и тражити вероватносне поставке за извођење једнако тачних (са класичним) једначинама кретања. Нарочито у свакодневном макро-свету где то гарантује закон великих бројева (опет) теорије вероватноће.

Ајнштајн[37] не би радо радио на климавим темељима, јер је био велики истраживач, а они су ретко задовољни половичним решењима. Стати на „дај шта било“ обично није стил таквих, па је тражио максимум у детерминистичким геометријама и тензорском рачуну. Приметио је да је сателит у гравитационом пољу заправо у слободном паду и у локалном бестежинском стању и закључио да геометрија простор-времена дефинише гравитацију, а да маса и енергија дефинишу геометрију. То је суштина Ајнштајновог извођења по њему названих општих једначина поља.

Преведено на метрику *тензора*, сателити падају крећући се *геодезијским линијама* које представљају најкраће путеве између датих тачака, такође и најмање могуће размене енергије, па и најмање потрошње времена. Недавно је доказано да ти геодезици следе принцип најмањег дејства, а сада бих додао и принцип (најмање) информације.

Тражење фундаменталног решења у детерминизму и геометрији само делом објашњава Ајнштајнов „јуриш“ на једначине поља објављене 1915. године, нарочито зато што је десет година раније упоредо са специјалном теоријом релативности он објавио и анализу *Браунових кретања*, насумичног понашања честица у раствору, а затим и много тога у квантној механици прилично некаузалној. Други разлози су у филозофској атмосфери тог доба.

На прелазу у 20. век у природним наукама преовладавао је механицизам. Пробијало се уверење да *физику* треба осамосталити, да је материја једно, а апстрактне идеје су нешто друго, да се природне науке требају држати чулних ствари. Томе је погодовала чињеница да је математика многима израстала у све неразумљивију „причу“. Друштвеним наукама наметао се *марксизам*, дијалектички материјализам, а некадашњи Платонов свет идеја губио је трку.

Један од лидера такве филозофије био је *Мах*[38], један од водећих физичара и филозофа тог времена. Прича се да је он једном приликом дошао на Болцманово предавање о ширењу топлоте путем вибрирања молекула, устао, окренуо се ка публици и узвикнуо: „Људи, немојте слушати овог човека, овај човек је будала, атоми не постоје!“ Болцман се убрзо после тога убио (био је склон депресији), али је његова теорија надвладала.

Строжије да гледамо и геометрија би била проблематична у материјализму. Супстанцијални свет нигде не гради тако праве линије, а још мање тако танке да би се оне могле правдати у грађевинарству, а онда бисмо се морали одрицати његових људских креација и држати се само примарних, да не кажем инстинктивних или животињских. Филозофији механицистичког материјализма назирао се крај већ у Ајнштајновој општој теорији релативности.

Данас су друга времена. Заступам филозофију природе по којој су информације свугде. Оне долазе из „локалне“ непредвидљивости. Зато комуницирамо, јер немамо све што требамо. Зато говорим о „информацији перцепције“, јер је сваки локални свет (честица) свет за себе, легалан је у тој теорији. При томе је небитно да ли је

[37] Albert Einstein (1879-1955), теоријски физичар рођен у Немачкој.
[38] Ernst Mach (1838-1916), аустријски физичар.

он сав наслоњен на једну ширу неизвесност, на општу непредвидљивост генерисану бескрајним апстракцијама попут математичких, јер тај „свет идеја“, односно свет истина, увек је већи од замисливог.

Ово последње можемо слободно рећи зато што нема скупа свих скупова (Раселов парадокс), нема теорије свих теорија (Геделова теорема), нема идеалног критеријума (Аровљева теорема). У том контексту Ајнштајнова општа теорија релативности испунила је очекивања, али је и зрела за нове садржаје.

Свет идеја већи је од замисливог
`http://izvor.ba/`
4. октобра 2019.

1.13 Простор и време

Простор, време и материја врсте су информације. Они постоје и предмети су комуникације. У нарави природе је да не комуницира све са свачим, па је логично питање постоји ли „нешто“ са чиме наше простор-време непосредно не интерагује, а да такво нешто такође „постоји“.

Присталицама механицистичког материјализма било би бесмислено такво питање, јер оно што не можемо пипати, мирисати, видети и уопште осетити чулима, што не може непосредно деловати на нас, рекли би, не постоји. Али не би били у праву.

Велики немачки математичар *Гаус* (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) својевремено се бавио сличним проблемом чије је решење објавио 1827. године под називом „изузетна теорема“ (лат. theorema egregium). Он је себи поставио питање да ли је наш свакодневни простор раван (еуклидски) или је можда закривљен (нееуклидски) и да ли бисмо и како ми то могли сазнати. Идући трагом Гаусовог решења његов ученик *Риман* нашао је математичке форме нееуклидских геометрија, а користећи њих *Ајнштајн* је дошао до својих општих једначина поља.

Нећемо дубље улазити у заплете нееуклидских геометрија, јер би нам и еуклидски можда били претешки, али понешто од свега ипак можемо разумети. Мрав који хода по сфери могао би „приметити“ коначност њене површине за разлику од обичне равнине. Он би се и даље кретао најкраћим путевима између датих места, али ти би путеви на сфери биле највеће кружнице, геодезици лоптине површи.

Закривљеност површи се може разматрати и овако. Поставимо на северни пол Земље неки вектор (орјентисану дуж) који онда паралелно померајмо (транслирајмо) нултим меридијаном, поред Лондона, све до екватора, замишљене кружнице која опасује Земљу на подједнакој удаљености од полова. Вуцимо вектор даље паралелно екватором до меридијана Београда, а онда га паралелно дижемо тим меридијаном све до северног пола. Почетни и завршни правац тог вектора на северу нису једнаки. Дефект правца је промена информације (неизвесности).

Поремећај правца еквивалентан је и промени вектора импулса. Промена импулса настаје трошењем енергије (рада), а она дејством неке силе. Свеједно, репрезентације промене вектора не би се могле десити у равном инерцијалном простору, па поменуте транслације доказују редом: да је простор закривљен, да је он поље неке силе, да има информацију.

Такође, метода разоткрива додатне *димензије простора* у којем је дати Риманов простор закривљен. Како кривина значи присуство гравитације (теорија релативности), а затим како правац гравитације са временском осом (време пута брзина светлости)

дефинише раван, у различитим тачкама поља различиту, при чему се временска оса утолико више нагиње ка просторној што је гравитација јача, откривамо да постоје три *временске осе* због три просторне.

То је заправо (непозната) непосредна последица Ајнштајнове теорије гравитације која нам говори о шест димензија простор-времена. Додатним просторним (не и временским) димензијама баве се и савремени физичари у оквиру теорије струна, међутим овде није реч о томе. Њихова теорија у основи је детерминистичка, а овде поентирамо информатички садржај.

Појачаћу ту причу *топологијом.* Топологија је део геометрије огољен од дефиниције дужине. Може се учинити да је она још више детерминистичка и даља од концепта неизвесности, али показује се да није. Индуктивна тополошка дефиниција димензије је за то посебно згодна.

Тачка је димензије нула и сваки коначан и дискретан скуп тачака је димензије нула. Ако фигура (скуп тачака) има дату димензију, онда и дискретан скуп истих фигура има исту димензију. Ако је „граница“ (скуп тачака) дате димензије и она одваја „унутрашњост“ од „спољашњости“ неке „фигуре“, ако она потпуно раздваја те две области, онда та „фигура“ има димензију за један већу од „границе“.

На пример, граница дужи су две тачке (димензије нула), а дуж је одсечак праве, па је права димензије један. Слично је са кружницом или неком другом кривом линијом. Граница круга је кружница димензије један, па је равнина димензије два. Слично важи за сферу или неку другу криву површ са затвореном (кривом) линијом. Сфера (димензије два) изолује унутрашњост од спољашњости простора, па је простор димензије три. Ако садашњост, са свим својим 3-Д простором у датом тренутку раздваја прошлост од будућности онда је простор-време димензије четири. Таква је природа апсолутног, класичног простор-времена.

У специјалној теорији релативности, инерцијалних система праволинијског кретања, појам истовремености је релативан, али се у њему увек може дефинисати „садашњост“ која потпуно одваја „прошлост“ од „будућности“, а онда је такав поједини димензије четири. То нама значи да су инерцијални системи минималне комуникације и да више таквих то нису. Различити правци инерцијалних кретања различито нагињу временске осе и са три просторне димензије граде три временске, исто као у поменутом гравитационом пољу. Погледајмо тај резултат још једном на начин који потврђује везу додатних димензија са непредвидљивошћу односно информацијом.

Замислимо озидану затворску ћелију и њено трајање. Без неизвесности и ерозије то би била 4-Д грађевина која би могла неограничено изоловати унутрашњост од вањског простор-времена. У случају ерозије изолација дела простор-времена (фигуром 4-Д) није бесконачна, па би тачке (догађаји) из унутрашњости ћелије кад-тад биле у спољашњости и, према поменутој тополошкој дефиницији димензије, формирале би простор-време димензије веће од пет.

Скицирао сам неке од начина откривања реалности унутар 6-Д простор-времена, који су у датом тренутку комуникација стално унутар само четири димензије, самим методама математике које би присталице механицистичког материјализма критиковали и успешно оспоравали. У томе је, поред осталог, величина генија Гауса и његовог ученика Римана који су живели у време растућег утицаја такве филозофије и нису јој сасвим подлегли.

Вектором од Лондона до Београда
`http://izvor.ba/`

11. октобра 2019.

1.14 Принцип информације

Случајности постоје, али их природа не воли. То је *принцип информације* у ужем смислу: информација је неизбежна и стидљива.

Зато се толико трудимо око разних предвиђања и вероватно грешимо, јер радимо са објективним непредвидљивостима које нам се мешају у сваки посао. Начелно шкртарење информације је око нас стално да својом благом, али упорном тежњом сакрива сазнања и истине где год се оне могу сакрити. Ретко га примећујемо.

На пример, *новинари* са правом кажу да је вест „човек је ујео пса“ већа од вести „пас је ујео човека“, јер је мање вероватна. Са истим разлогом информација „пало је писмо“ код бацања фер-новчића већа је од информације исхода „писмо“ нефер новчића ако је оно очекивано. Дешавају се начелна измицања из те „расипничке“ ситуације и на друге начине.

Уједначавање почетних услова учесника у *спортском* такмичењу сматрамо фер и она им максимирају шансе. Повећавају број и успешности опција појединаца у надметању ослобађају напоре за дизање квалитета и жестине борбе чинећи догађај богатијим. На принципу информације је да те помаке сузбија. То се и дешава јер је информација физичко дејство, једнакост увећава шансе за сукобе, а сукоби су непријатни, они су напорни.

Излази да је равноправност фер, корисно и непријатно стање. Једнаки имају више шанси за напредовања, али и недељивих циљева и разлога за сукобе, па смо се досетили уређивању друштва помоћу правних система темељених на једнакости.

Стварајући равноправности стварају се претпоставке за нове *сукобе*, чиме се систем самопотврђује и расте. *Правно* регулисање спонтано постаје све сложеније, гушће и скупље. Оно постепено редукује слободе појединаца крадући их за себе, затим гуши фер стања. Претераним уређивањем друштва због слободе и једнакости тако се стиже до неслободе и неједнакости.

Друштвене појаве нису изузете од закона информације па онда ни од *дуалности*, њене важне особине. Неодређености су суштина информисања, извор опажања од немогућих до сигурних догађаја (све до теорема), јер и извесности су знања. Природа бежи од неизвесности ка извесности где год то може, а ове последње толико су мало информативне да их не опажамо директно него их разумемо апстрактно. Све што можемо да доживимо, затим простор, време и материја, али и сигурне ствари врсте су информације.

У примере минимализма информације спада и *феминизација*, односно спонтани раст *ентропије* (окретања ка унутра). Молекуле гаса у соби распоређују се једнолико зато што је тај распоред вероватнији од гомилања. Унутрашњи ред називамо неред, јер га гледамо извана. Уређене ствари мање су вањски информативне, као униформисани и постројени војници на смотри, безличне су и аморфне. Збирна информација собе и њене довољно велике околине настоји остати константна.

Да ред емитује мање информације чини се спорним (мојим колегама), па наводим још један пример. Текст сачињен од насумичних речи неког речника мање је „порука“ од праве поруке. У садржајаном тексту поједине речи су статистички значајно чешће од других, њихове фреквенције појављивања у тексту поруке разликују се. Уважавам да је нулти ред, односно апсолутни *неред* немогућ (Ремзијева теорема: у довољно

насумичних речи наћи ће се свака унапред дата реченица), штавише приметићу да је и то у складу са принципом информације.

Спонтани раст ентропије препознајемо у другом закону *термодинамике* (прелазак топлоте са топлијег тела на хладније), али он се назире и у трошењу сваког појединог *друштва*. Успешне цивилизације попуњавају своје дефиците удобности и сигурности у ходу развијајући се, кажемо цивилизујући се, са све више унутрашњег реда и све мање вањске агресивности.

Слично је са облицима *живота* уопште. Они настају усложњавањем и акумулацијом информације њеном принципијелном штедљивошћу, а затим због истог тело их види као вишак којег се жива јединка решава интеракцијама са околином или преносећи сопствено дејство (информацију, слободу) на виши облик у организацију.

Заједно са материјом, простор преузима и акумулира део информације садашњости. Растућа ентропија супстанце васионе умањује емисије информације тачно за износ акумулације у простору. *Вакуум* је магацин прошлости који стално расте.

Притајено деловање умањивања информације видљиво је и у *закону великих бројева* теорије вероватноће. Преласком из микро-света у макро-свет сложености расту, неизвесности постају извесности, па у „свету великог“ уместо да имамо више информације разазнајемо је све мање. Те врсте притајене акумулиране информације откривамо и кроз „немирне“ облике *расподела* (звонасте, експоненцијалне, степене), увек због неизбежних случајности и настојања природе да их негира.

Зато што су информативнији догађаји мање вероватни и зато што их природа мање воли, друштвеним мрежама дезинформације путују брже. Лаж је привлачнија од истине, фикција од науке, декодирање као чин сазнавања теже је од кодирања.

Дејство је информација, али вас погодак камена у главу не чини преинформисаним захваљујући принципијелном минимализму информације. Са друге стране, развој људског сазнања током миленијума каже нам да природа своје истине од нас не успева сакрити.

Вакуум је магацин прошлости који стално расте
`http://izvor.ba/`
18. октобра 2019.

1.15 Димензије времена

Концепт додавања *временских димензија* једна је чисто математичка апстракција и никада неће имати везе са неком реалношћу – једно је од уобичајених питања – јер оно о чему нема информације не постоји, а нема (физичке) информације између *паралелних реалности*.

Приметићу да се у оваквим питањима дехуманизује „математичка апстракција“ и подмеће механицистичка филозофија, али пођимо редом.

Када би појам *истовремености* био универзалан за све физичке системе васионе (тела у кретању, гравитациона поља), онда бисмо сав 3-Д простор могли представити једном тачком на временској оси. Та би тачка „свемирског простора“ даље од исходишта означавала старију васиону и то је све. Не бисмо знали шта је унутра. Нема информација о распореду и динамици материје и већ због тога би модел *информатичке васионе* којој тежимо морао изгледати другачије.

Можда је изненађење, али *теорија релативности* је такође[39] добар почетак, иако је она наизглед узорно детерминистичка, а за „информатички универзум“ важне су опције и објективне случајности. Због релативистичке забране синхронизације свих садашњости и немогућности дефинисања јединственог 3-Д простора целокупне васионе, претпостављена тачка на временској оси расте и расплињава се у свом ходу. Она се шири у 3-Д координатном систему времена, јер сваки нови правац кретања тражи нови нагиб временске осе већи са брзином кретања.

Формална замена променљивих простора и времена могућа је. Постоји аналогија ширења и једнак је број димензија времена као и простора, по три, тако да је прелаз „временског“ у познати просторно-временски модел Минковског теорије релативности формално могућ. Препознајемо купе светлости које се додирују врховима у исходишту. Међутим, раст и ширење „тачке простора“ даље говоре о слободи опција, о различитим могућностима еволуције васионе у складу са претпостављеним објективним случајностима. Ево једног примера па настављам.

Биолошке врсте у *Дарвиновој еволуцији* такође имају ширину развоја. Велико мноштво начина адаптације на околину ради опстанка јединки, као и начина изумирања, указује на то да ту често и нема најбољег пута, поред понеких еволутивних конвергенција попут формирања исте физиологије ока из различитих полазишта. Покретача промена има разних.

На пример, у развој снаге лава, рогова јелена, шареног перја код неких птица или интелигенције људи умешало се и удварање. Сексуална привлачност неке особине додатак је, опција, уз голе способности преживљавања. Појава интелигенције код људи могла је бити више ризична него корисна, јер мозак зна више трошити него доприносити, али је опстала.

Тако бисмо могли гледати и на *еволуцију* неживог света (физике) и објаснити један његов проблем са спонтаним растом енторпије (други закон термодинамике). Парадоксално, али принципијелно шкртарење са емисијама информације тежи еволуцији физичких стања у мање информативна, па се онда чини да обрнут ток времена није могућ. Али то би тада било у нескладу са квантном механиком, јер све еволуције квантних стања дефинишу унитарни оператори који су реверзибилни и дозвољавају супротан ток времена. Објашњење овог парадокса, поред осталог, могуће је и са становишта *кардиналности* (бесконачности) теорије скупова.

Низ тренутака у којем постојимо као и низ (свих) атома васионе може имати највише *пребројиво* бесконачно елемената. Толико је природних бројева, толико је целих бројева, тачно толико има и свих разломака, кажемо има их *дискретно* (умерено) бесконачно много. Због закона одржања информације и особине *бесконачних* скупова да могу бити једнаки (количином) свом правом делу, информације су коначно дељиве па чине кажемо дискретне скупове. Њихова унија као дискретан скуп дискретних скупова, васиона информација, такође је дискретна.

Међутим, реалних бројева има много више, непребројиво бесконачно много, кажемо *континуум* много. Њих у низу са пребројиво много позиција генеришемо варирајући вредности позиција, чланова низа, дозвољавајући по две или више опција бесконачном поднизу тих чланова. Квака је у томе што је континуум толико много већи од дискретног скупа да би вероватноћа избора разломка, *рационалног броја*, на произвољном делу, интервалу реалних бројева – била нула. Штавише, у (пребројиво) бесконачно много покушаја вероватноћа избора макар једног јединог разломка је нула.

[39] Доказа ове тезе имам разних.

Другим речима, случајни избор рационалног броја међу реалним је „скоро немогућ“ догађај. Практично, у васиони коју покрећу и случајности, шанса да би нека, једна те иста, *античестица* (честица са обрнутим током времена) из наше садашњости могла доћи у тренутак раније (наше прошлости) немогућ је догађај. То значи и да античестице које видимо сада па у следећем тренутку никада нису исте.

Ето зашто нам треба континуум 6-Д простор-времена у васиони информација чије свако својство је коначно дељиво. Зато је и 4-Д простор-време Минковског континуум. Зато важе претпоставке инфинитезималног рачуна тако да једначине кретања физике, Ајнштајнове једначине или Риманова геометрија (због инфинитезималног рачуна) могу бити тачне теорије.

Има много сличних „реалних“ последица поменутих „математичких апстракција“, али *реалност* за несвесна бића каква су трава, мрави или неке крупније животиње, нема смисао онога што реалност јесте. За тим правим одредницама реалности ми још увек трагамо и не треба журити и рећи „није реално“ за нешто што, рецимо, не можемо да поједемо.

Раст и ширење „тачке простора“
`http://izvor.ba/`
25. октобра 2019.

1.16 Доплеров ефекат

Кристијан *Доплер* (Christian Doppler, 1803-1853) био је аустријски математичар и физичар, најпознатији по ефекту који носи његово име и који представља релативну промену таласне дужине и фреквенције таласа извора у кретању у односу на мирног посматрача.

Ова наизглед безазлена појава згушњавања таласа којима прилазимо и разређивања оних од којих одлазимо има неочекивану дубину и занимљиве импликације.

Доплеров ефекат или помак јавља се и у *звуку* сирене возила које пролази поред нас која има виши тон у доласку и нижи у одласку него исте сирене у мировању. Брзина таласа је број осцилација множен таласном дужином, па у медију (ваздуху) константне брзине таласа (звука 346 m/s на 25° C) то значи да су таласи извора који нам прилази краћи, а у одласку дужи. Распон фреквенција звука чујности млађе особе је од 20 до 20.000 херца (трептаја у секунди).

Слично је са *светлошћу*. Када се Земља у ротацији око Сунца приближава односно удаљава од непокретних звезда њихова боја привидно се помера ка љубичастој односно црвеној, у првом случају ка таласним дужинама око 300, а у другом ка 700 нанометара. Фреквенције тих рубова опадају од 1.000 до око 430 терахерца, тако да је њихов производ са таласном дужином једнак брзини светлости у вакууму, иначе независној од брзине извора.

Специјална теорија релативности потврђује овај ефекат, али додаје и трансферзално (бочно) смањивање фреквенција сразмерно релативном успоравању тока времена. Средња вредност, аритметичка средина лонгитудиналних (уздужних) фреквенција извора светлости у доласку и одласку тачно је једнака трансферзалној фреквенцији. Због константне брзине светлости у вакууму одговарајуће смањењу фреквенције је повећање таласне дужине. Општа теорија релативности доследно успоравању времена у јачој гравитацији предвиђа успоравање фреквенција светлости и опет повећање њихових таласних дужина.

Сагласно квантној механици ово издужавање таласа тумачимо повећањем неодређености положаја честице-таласа, па сходно теорији физичке информације (хипо)тезом да позиције простора којем се приближавамо видимо вероватнијим од оних од којих се удаљавамо. Штавише, у складу са третирањем (6-Д) простор-времена те теорије можемо рећи да идемо у будућност зато што нам је она вероватнија.

Поновићу, релативистички ефекат, да инерцијални систем (тело) који нам се приближава има успорен ток времена, при чему ће се његова и наша садашњост изједначити у тренутку сусрета, значи да је он до тог тренутка у нашој све ближој будућности.

Са друге стране, инерцијални систем који се удаљава, а такође има релативно спорији ток времена, заостаје све даље у нашој прошлости. Тумачење већим вероватноћама због краћих таласних дужина првог система и обрнуто мањим вероватноћама позиција удаљавања придодато је сада.

Коначан резултат имамо и у теорији релативности и квантној механици и односи се на 6-Д просторвреме (раније сам описивао). То објашњење не би било могуће без „апсурдне“ релативистичке контракције дужина у правцу брзине (или у правцу поља) уједно са повећањем таласних дужина.

Наизглед безазлени Доплеров помак има још занимљивих импликација. Погледајмо шта нам он новога можда поручује у вези са *ентропијом*. Из класичне и релативистичке механике познато је да (кинетичка) енергија тела расте са брзином, али Планкова квантна формула каже да је енергија фотона пропорционална само његовој фреквенцији. Парадоксално је што Доплеров ефекат предвиђа смањење те енергије због кретања извора светлости којем се повећава енергија.

Једна од могућности је да зато предефинишемо појмове *топлоте* (топлотне енергије) и температуре тела због чувеног Клаузијусовог разломка, количника топлоте и температуре, који је он 1850. године назвао ентропијом. Прогласимо да се кретањем повећава *температура* тела и његова кинетичка енергија али не и топлота.

Повећање температуре опажамо као Доплеров помак ка црвеном, а настало опадање ентропије у складу је са Болцмановим статистичким тумачењем. Наиме, релативистичка контракција простора дуж правца кретања и изостајања окомитих промена нарушава хомогеност тела. Релативна нехомогеност смањује Болцманову ентропију.

Са друге стране, раздвајањем појма топлоте од кинетичке енергије изостаће промена бројника (топлоте) Клаузијусовог разломка и због повећања називника (температуре) он (ентропија) ће се умањити. Ентропија се тако смањује пропорционално релативном успоравању тока времена (црвеном помаку). Тада тело остаје у свом инерцијалном стању кретања јер неће спонтано прећи у стање ниже ентропије.

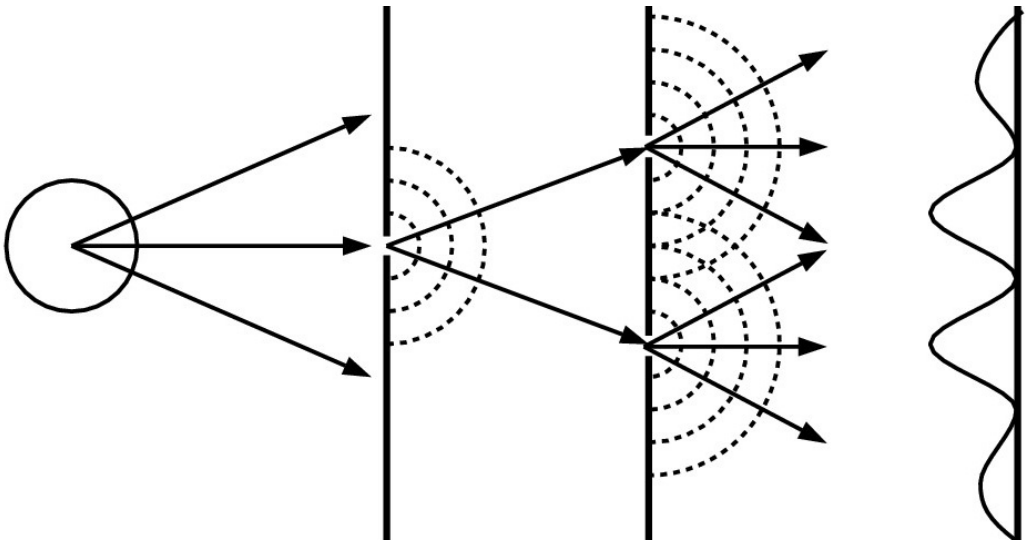
Наглим заустављањем, у тренутку судара са препреком, температура тела је као и непосредно пре судара релативно већа, кинетичка енергија прелази у топлотну и расте ентропија тела. Чаша у лету, тек када удари у препреку, разбија се сагласно повећању нереда због повећања ентропије (у обе ситуације: 1. чаша лети па се разбије о тело, 2. чаша мирује а тело је удари).

Путовање ка црвеном помаку
`http://izvor.ba/`
1. новембра 2019.

1.17 Двоструки отвор

Може ли теорија информације рећи нешто о фамозном експерименту *двоструки отвор* квантне механике, пита ме пријатељ и тражи да ствар мало прилагодим нематематичарима. Наравно, одговарам и настављам: ако вакуум посматраш као један велики стари океан неизвесности, а неизвесност врстом информације, тада прича тече сама.

Пре свега, познаницима појашњавам да је „двоструки отвор“ *Јангов*[40] експеримент из 1801. године којим је он доказивао интерференцију светлости и тиме да светлост није корпускуларна како ју је *Њутн* описивао у својој „Оптици“ (1704). Тек је квантна механика након хипотезе *Луја де Броја* (1924) о таласној природе материје показала да су обојица били у праву. *Дејвисон*[41] и *Гермер*[42] (1927) утврдили су сличну честично-таласну дуалност код електрона, а затим је та дуалност потврђивана и код атома и молекула.



Slika 1.1: Интерференција.

Уређај се састоји од извора снопа честица-таласа који наилазе окомито на две паралелне равне препреке, прве са два блиска и уска вертикална прореза (отвора), а друга је детектор, екран за мерење укупног дотока енергије снопа. Када су два прореза отворена, сноп пролази кроз оба, интерферира и на екрану се појављују тамне и светле пруге са више и мање пристигле енергије, карактеристичне за дифракцију таласа. Када је један отвор затворен, нема интерференције између плоча и нема дифракције на крају. Показује се слика погодака као у случају дела млаза лоптица које би прошле кроз отвор.

Та дуална честично-таласна природа материје већ је сама по себи загонетна, али са овим експериментом има у њој нешто још чудније. Када се честице снопа пуштају са извора једна по једна, временски одвајане у дужим или краћим интервалима на случајан или други начин, слика на екрану се понавља: пролазећи кроз само један прорез честице немају дифракцију, када иду кроз оба имају.

[40] Thomas Young (1773-1829), британски физичар.
[41] Clinton Davisson (1881-1958), амерички физичар.
[42] Lester Germer (1896-1971), амерички физичар.

Математика је ту јасна (познаваоцима). Сабирамо векторе апстрактног Хилбертовог простора који сада репрезентују квантна стања проласка кроз прорезе и према Боровом закону интерпретирамо вероватноће. Један део честица (снопа) одбија се од прве препреке, други део пролази и стиже до друге препреке (детектора), израчунамо густину вероватноћа и утврдимо да мерење потврђује управо оно што је израчунато.

Квантна механика је у том смислу невероватно тачна теорија, а опет је непојмљиво интуитивно необјашњива. Због овог другог она је можда таман толико толерантна да интерференцију једне једине честице саме са собом док пролази кроз два отвора схватимо као њено цепање пре и удруживање након препреке са два прореза. Ова „могућност“ честице-таласа вероватноће за сада је и нешто најубедљивије што у овом случају квантна механика има.

Еверет, који је (1957) предлагао идеју о *много светова* квантне механике, у том цепању видео је појављивање исте честице из различитих псеудо-реалности и њихову интерференцију. Алтернативна могућност овој опет је у самој вероватносној природи, сада информације. *Честица* (фотон) која путује *вакуумом* стицала би информације успут, она би комуницирала са „празнином“ и стварала своју прошлост, а како због тога она не расте то расте вакуум. Доследно, празан простор је „пун као брод“.

Обе појаве су могуће, да су у квантном свету случајности значајне и са честицама које се може појављивати на више места одједном, а са друге стране, да је празан простор врста неизвесности, дакле информација, да има потенцијал комуникације, таласа-честица и интеракција. Величина простора тада говори о прошлости која може утицати на садашњост. Поменути начин је интерференција прошлих и садашњих одговарајућих таласа-честица.

Закон одржање количине ограничава обим података датог система, не и њихове унутрашње промене. Када су оба прореза отворена путања честице није добро дефинисана, још увек постоје избори и честицом доминира таласање вакуума, комуницирање које је циклично размењивање неизвесности. Када је један прорез затворен, утолико је мање неизвесности и честица и њена путања су изјашњени. Информација је тада формирана и нема места за виртуелни утицај вакуума. Рачун и слика на екрану показују корпускуларно понашање емисије.

Овај опис простора који памти и делује за објашњење парадокса двоструког отвора довољан је као и први (Еверетов). Као код бацања коцке (шест бројева) неизвесност је увек ограничена опцијама које се једине могу реализовати у информацију. Вакуум комуницира са свиме што њиме пролази и, према томе, располаже огромним потенцијалом информација. Он је зато историја пролазака, резервоар могућности који стално расте, док год добија новости од својих путника. Виртуелни таласи вакуума су интерференције тих прошлости, попут таласа на површини океана испод којих се налази много воде. Као геолошке наслаге, или ми сами уосталом који смо и оно што смо доживели или што смо наследили, *простор памти.*

Ванвременска природа математике подржаће и ово друго објашњење експеримента „двоструки отвор“. Додаће је као врсту генерализације *Маховог принципа* који је својевремено заговарао Ајнштајн мирећи релативност кретања и просипање воде из лавора док се посуда и текућина окрећу. Сва материја васионе ствара једно гравитационо поље унутар којег тела могу ротирати, а сада само додајемо да то поље садржи и историју васионе.

Такво објашњење охрабрује сама природа *интерференције* таласа чији назив је, приметићу, у нескладу са појмом независности случајних догађаја теорије вероватноће. У корену речи „интерферирати“ је деловање на нешто, зависност, док интерференција

таласа заправо изражава њихову независност. Зависне су честице које би се привлачиле или одбијале, а не рецимо боје светлости које увек можемо саставити у белу, а њу опет (Њутновом призмом) разложити на неоштећене састојке. Зависна је бела боја од својих компоненти, али нису њене компоненте међусобно.

Ако су два случајна догађаја независна, онда се они не искључују, а ако се искључују, онда су они зависни. То је теорема теорије вероватноће (в. доказ у мојој књизи „Квантна механика“ [4]), која због форме квантних стања имплицира горње објашњење. Међутим, оно је тек почетак једне дуже још интересантније приче о информацији у физици.

Празан простор је „пун као брод“
`http://izvor.ba/`
8. новембра 2019.

1.18 Гомилање историје

Простор, време и материја облици су информације. Они комуницирају зато што је за њих неизвесност објективна, што су на то приморани и зато што немају све што им треба. Друга важна особина информације интересантна за данашњу тему је њена непоновљивост.

Пре него што бацимо новчић, коцку или извучемо куглицу из лото бубња имамо неизвесност чија количина расте са бројем опција. Оно што је даље нама важно код оваквих случајних догађаја јесу количине – да пре и после реализације добијамо тачно једнаку количину информације у односу на неизвесности. То је смисао закона одржања информације и разлога називања оба ова стања истим именом. Информација је нарочито дефинисана мера података која остаје константна док се подаци (затвореног физичког система) мењају.

Података у неизвесности једног случајног догађаја има више од једног, али исход је само један. Поред тога, неће бити исхода нечега чега није било у претходним могућностима. Када бацамо коцку и једнаке шансе има сваки од бројева, од један до шест, то значи да број седам нема шансе. Додајмо ово претходном као (неки нови) закон одржања самих података.

Две врсте неизвесности, пре и после случајног догађаја, односно две врсте информације, због разликовања назовимо потенцијалном и актуелном информацијом. Као и уопште добро изабрани називи у математици и ови би требали бити корисни.

Називи намерно алудирају на потенцијалну и кинетичку енергију чија разлика (кинетичка минус потенцијална) јесте *лагранжијан*. Испољена енергија за дато време назива се *дејство*, па су еквиваленти поменутим информацијама сада потенцијално и актуелно (кинетичко) дејство. Принцип најмањег дејства (најмање промене енергије) тако постаје принцип најмање информације, а то је опет у складу са претходним, уз напомену да се овакве ситуације још увек не разматрају у физици.

Тако простор изгледа са становишта теорије информације, он комуницира са телима у пролазу неизбежно купећи понешто од њихове историје. Подразумева се да елементарна честица не расте заједно са нарастањем своје прошлости, што значи да сав вишак новости она остављају вакууму (и другим телима ако је у прилици). Резултат је стално гомилање историје света у супстанци и у самом простору.

Да нам структура тела, попут *геолошких наслага* или радиоактивног угљеника може дати информације о себи некад и није неко откриће, али јесте да то чини и сам простор.

Савремена физика зна да *вакуум* има своју динамику, да је препун виртуелних честица и то такође није спорно. Оригиналност је да је вакуум *магацин историје*.

Извесност нема информацију и поновљена вест није више информативна. Понављање исте физичке информације није у опцијама интеракција. Са дословним репликама не комуницирамо и зато у перцепцији света имамо толике различитости. Зато простор расте (количином неизвесности) и никада није исти, а његове нам промене нуде скривену историју.

Што се тиче „празнине“ две су крупне последице ове принципијелне јединствености информације коју сада има смисла промовисати. Прва је њено ширење, а друга је деловање прошлости васионе на садашњост. Простор чине потенцијалне информације и поготово зато оне се могу реализовати, а прикривеност и неочекиваност јесу њена бит, као и само деловање.

Погледајмо како ново објашњење функционише са парадоксом принципа минимализма који сам раније наводио као конфликт закона одржања информације и еволуције ка евентуално све мање сложеној будућности. Исти је примећен у литератури као парадокс ентропије због реверзибилности времена у квантној механици.

Тамошњим разлозима сада додајмо и следеће: укупна информација васионе константна је. Евентуални мањак информације у супстанци настао због принципа минимализма (она еволуира у мање информативну) увек је једнак насталом вишку историје васионе садржаном у простору.

Открића астрономије 20. века могу потврдити још понешто. Амерички астроном Весто *Слајфер*[43] је 1912. године открио *црвени помак* удаљених галаксија који је касније интерпретиран као удаљавање галаксија од Земље. Доследно (новој) информатици додајмо да је температура тих галаксија (истог стања супстанце) већа, да топлота није исто што и кинетичка енергија (није увећана удаљавањем), па за Клаузијусову *ентропију* (количник топлоте и температуре) добијамо мањи број. Пошто је светлост са удаљених галаксија дуго путовала, ентропија у прошлости је мања и то је у складу са другим законом термодинамике – да се ентропија повећава.

Руски математичар и физичар Александар *Фридман*[44] 1922. године из Ајнштајнових једначина поља извео је теоријски доказ ширења васионе. Независно од њега белгијски католички свештеник и професор астрономије и физике Жорж *Леметр*[45] 1927. године дошао је до сличних закључака, а амерички астроном Едвин *Хабл*[46] је две године касније потврдио ове теоријске резултате опажањима телескопом.

Према космолошком принципу, запажању да је просторна дистрибуција материје васионе хомогена и изотропна, гледано у довољно великој размери, закључено је да се галаксије удаљавају једна од друге. Грубо речено, оне су попут мрља на балону који надувавамо. Тај закључак у складу је са горњим налазима ако прихватимо да се гомилање историје у простору очитује ширењем васионе.

Штавише, из сталног прираштаја по јединици запремине можемо извести и закључак о убрзању тог ширења васионе и тако се укључити у најновија открића астрономије и теоретисања о *тамној енергији*. У оквиру истих хипотеза било би и разматрање *тамне материје* као гравитационог деловања поменуте прошлости на садашњост ако би се упоређивања кретања галаксија данас и концентрације њихове материје некада слагале са очекивањима.

[43] Vesto Slipher, 1875-1969.
[44] Фридман, Александр Александрович, 1888-1925.
[45] Georges Lemaître, 1894-1966.
[46] Edwin Hubble, 1889-1953.

Али, са становишта разноликости информације чудно би било да је то све што се крије у „тамној енергији“ и „тамној материји“, чак и када би део ове теорије био факат.

Вакуум је магацин историје
http://izvor.ba/
15. новембра 2019.

1.19 Класична сила

Концепт класичне силе у данашњој физици је у кризи. Та криза је почела са теоријом релативности и даље се само развијала, али још увек није достигла ниво некадашњег у (ал)хемији популарног *флогистона* на којег су тачку на крају ставили *Лавоазије*[47] и *Пристли*[48] својим истраживањима и открићем кисеоника.

Ето зашто информацију не зидам на одредницама класичне силе, јер сваки пут када сам то покушао нешто није штимало – кажем у одговору на питање читаоца.

Пре свега, дефиниције *силе* која маси даје убрзање и оне која мења импулс временом дају различите вредности у специјалној теорији релативности, а биле су једнаке у класичној физици. То је зато што се релативно време, маса и импулс тела у кретању у односу на посматрача у мировању тако трансформишу да се две одреднице силе не слажу.

Појаснићу ово укратко без много формула, осим што треба знати да се повећањем брзине *инерцијалног система* релативне јединице времена издужују, расту маса и енергија, а такође и импулс у правцу кретања, све пропорционално једном коефицијенту који се назива Лоренцов и означава са γ, грчким словом *гама*. То је број који расте од један до бесконачно када брзина расте од нуле до светлосне. Обрнуто пропорционално коефицијенту релативне дужине се скраћују.

Убрзање је пређени пут у јединици времена по времену, па се убрзање по правцу релативног кретања смањује пропорционално трећем степену гаме (обрнуто је пропорционално кубу тог коефицијента). Маса се повећава, па се сила као производ масе и убрзања (по правцу кретања) смањује са квадратом гаме. Израчунавања су дужа, а ово је само скица резултата.

Другим речима, сопствени посматрач покретног система, који у том систему мирује и који би опажао једнолико убрзање свог система са константном силом потиска напред, релативном би изгледао као да губи на тој сили и још више на убрзању. Пад убрзања је такав да он никада не би могао достићи брзину светлости. Обрнуто, када бисмо извана хтели да видимо његово константно убрзање, сила и убрзање које би осећао сопствени посматрач морали би расти до бесконачности.

Релативни импулс тела по правцу кретања расте истом сразмером као и издуживање јединица времена (успоравање времена), па промена импулса у јединици времена остаје иста за релативног и сопственог посматрача. То значи да је релативна промена силе, као промене импулса за дато време, у конфликту са претходном дефиницијом (силе која убрзава масу). Када по уџбеницима физике тражите Лоренцову трансформацију силе, специјалне теорије релативности, наилазићете на овај израз – да је релативна сила по правцу кретања једнака сопственој.

[47] Antoine Lavoisier (1743-1794), француски хемичар.
[48] Joseph Priestley (1733-1804), енглески хемичар.

Занимљиво је да бочна сила по обе дефиниције даје исти резултат. Наиме, нема релативистичке контракције дужина окомито на правац кретања, па рачун даје опадање релативне силе пропорционално са (реципрочном вредношћу) коефицијента гама. То се слаже са оним парадоксом два воза о којем сам писао објашњавајући Бернулијеву једначину према којој флуид кретањем усисава околну твар. Свеједно, делимично слагање је неслагање.

Егзактне науке, а нарочито математика, верују само оним истинама из којих се бесконачно могу изводити дедукције са увек једнако тачним последицама, а нити једна од класичних дефиниција силе не испуњава тај критеријум. За разлику од класичне силе, за сада, принцип најмањег дејства и одговарајући принцип информације добро функционишу у свим околностима и зато их толико експлоатишем.

Сагласно принципима највероватнији догађаји најчешће се реализују, ма какве околности биле, па силу треба дефинисати као нешто што пркоси спонтаности. Сила је, дакле, нешто што мења вероватноће, да би у новим околностима најчешће реализације промениле своје изборе, односно нешто што већу информацију претвара у мању. У теорији игара би рекли да сила мења информацију у дезинформацију, а онда и шире од тога – да од слабијих шанси за победом направи боље.

То су довољни разлози због којих класични концепт силе треба мењати начелом најмањег дејства односно информације, а тако и радим – додајем на крају у поменутом дописивању.

Бочне силе и коефицијент гама
`http://izvor.ba/`
22. новембра 2019.

1.20 Фуријеов развој

Један од највећих француских математичара Жозеф *Фуријe* (Joseph Fourier, 1768-1830) био је син кројача и сироче од осме године. Почео је школовање у манастиру, па у војној школи и стигао до студента Високе школе Француске код чувених професора Лапласа и Лагранжа да би 1797. године добио катедру математике у Политехничкој школи.

Фурије је био учесник Француске револуције, пратилац Наполеона у Египту (1798), високи дипломата, секретар Египатског института, од 1817. године члан Академије наука (Académie des sciences), 1826. године члан Француске академије (Académie française), а нама је нарочито интересантан због открића по њему названих редова.

Он је приметио да се тригонометријске функције и посебно синусоиде понашају аналогно валовима. Сабирају се тачно симулирајући интерференцију таласа, а са довољно одговарајућих синуса у збиру могу имитирати скоро сваку аналитичку функцију. Та универзална замена збиром *синусних функција* можда је много касније дала идеју Луј де Броју да 1924. године да изађе са хипотезом о *таласима материје*, али и да није, значај Фуријеове анализе за квантну механику показаће се огромним.

Познато је да жицу можемо одговарајуће разапети тако да она побуђена титра *стојећим таласима*, мирујући у неким тачкама, чворовима између којих осцилује. Фуријеова математика такве таласе по жељи сабира и транслира, формира унапред жељене облике и имитирајући постиже сваку врсту трајекторије физичких честица. Његове теореме доказују да у математици нема препрека претпоставци о таласној структури материје.

Успостављајући *бијекције* (обострано једнозначна пресликавања) између материје и дејства, интеракције и комуникације, налазимо да Фуријеов развој у редове једнако важи и за (физичку) информацију. Сваки титрај има неку периоду, реципрочна њој је *фреквенција*, а овој можемо придружити *енергију*, импулсе и дејство. Приметимо да је титрање и податак и материјална појава и дубљи разлог да Шредингерова једначина (1926) једнако добро опонаша информацију као и материјалне квантне појаве, па се вратимо мало у прошлост.

Фуријеово откриће је касније више пута побољшавано и генералисано ка другим, данас знамо било којим фрагментима произвољне функције да би се „интерференцијом“ правио скоро сваки жељени облик. Другим речима, математика дозвољава елементарним парчићима трајекторија честица свакакве форме да они заправо и немају форму. То је гаранција неконтрадикторности данашње физике микросвета засноване на микронеодређеностима. А неизвесност указује на информатичко порекло материје.

Штавише, како таласне функције тако и поједине „слободе“, сабирке информације перцепције која је скаларни производ вектора интелигенције и хијерархије, коректно је посматрати као комплексне бројеве. Зато је могуће третирати логаритме експонената тих комплексних бројева као добре сурогате физичке информације и онда добијати периодичност слично честицама (логаритми комплексних бројева су периодичне функције). Опет је математика та која таква гледишта дозвољава, она доказује њихову универзалност и непротивуречност. Међутим, са овим познатим ставовима није крај употребе Фуријеове методе.

Упоредо иде додељивање енергије фреквенцији, а ње информацији и обрнуто, а затим и успостављање еквиваленција између осталих физичких величина, рецимо путем таласа, са информацијом. То је детаљ из општих апстрактних веза између истине и материје, којих има од познатих до у физици још неоткривених. Њих треба разликовати од хипотетичне дуалности материје и силе, идеје теорије *суперсиметрија*, јер још увек стоји могућност да сила и материја нису једнако добро утемељени физички појмови.

Међу познатије дуалности спада и сада већ разрађена, али још увек интуитивно несхватљива физикална сличност вектора и оператора квантне механике. Она води у дуалност квантних стања и процеса са некима од најчуднијих феномена теоријске физике који су током друге половине 20. века увелико проверавани и коришћени, али о којима је тешко популарно причати.

Једноставно речено, основни појмови квантне механике попут енергије, импулса или положаја поред својих класичних физичких вредности које се изражавају у техници добро познатим системима јединица заснованим на килограму, метру и секунди имају своје дуалне облике у диференцијалним и другим операторима математичке анализе. Ти оператори формално се понашају као и саме физичке величине иако репрезентују њихове еволуције.

Познаваоцима математичке анализе ова дуалност оператора и величина квантне механике „нормална“ је појава, али и најбољима рутински радећи промакне да се у основи таквих веза налази развој истраживања Жозефа Фуријеа, француског математичара по којем је назван Универзитет у Греноблу. То је данас велики научни центар, посебно у области физике, информатичких наука и примењене математике.

Високе школе кројачевог сина
`http://izvor.ba/`
29. новембра 2019.

1.21 Закон великих бројева

Закон великих бројева теорије вероватноће још једна је потврда начела минимализма информације. Када желимо више и добијемо мање, он додаје. Ево неколико основних појмова.

Италијански математичар Ђироламо *Кардано* (Gerolamo Cardano, 1501–1576) наводио је да се тачност статистичких налаза побољшава бројем покушаја. Ипак је Закон великих бројева (ЗВБ) први доказао швајцарски математичар Јакоб *Бернули* (Jacob Bernoulli: Ars Conjectandi, 1713) за бинарне случајне променљиве и прогласио га *златном теоремом*, касније називаном по њему. Француски математичар Симеон *Поисон*[49] је то откриће детаљно описао у истоименој књизи (La loi des grands nombres, 1837) након чега су уследила значајна истраживања теме *Чебишева*[50], *Маркова*[51], *Борела*[52], *Кантелија*[53], *Колмогорова*[54] и *Хинчина*[55].

Када бацамо фер новчић шансе да падне писмо односно глава тачно су пола-пола, али то не значи да ће у сваких десет бацања пасти тачно пет пута писмо и пет пута глава. Поред математичког *очекивања*, средње вредности, важна је и процена средњег одступања од очекиваног исхода. Ово расипање око очекиване вредности уобичајено меримо тзв. *дисперзијом*. Очекивање и дисперзија дефинишу углавном сва нама занимљива својства расподеле вероватноћа случајног догађаја, бар што се тиче математике.

Замислимо неки случајни догађај, тзв. опит, попут бацања (може и нефер) коцке. Сваки од исхода има неку своју вероватноћу, реалан број од нуле до један, тако да збир један значи да ће се сигурно нешто од свега десити. Шансе појединог исхода можемо изразити и процентом његове појаве у неком дугом низу понављања опита или коефицијентом, количником броја датог исхода и свих понављања опита. Збир свих процената је сто, а збир свих количника је један.

Збир свих (реализованих) исхода тачно је једнак броју опита, као и збир њихових математичких очекивања. Зато за сваки од исхода разлика броја реализација и очекивања подељена укупним бројем опита тежи нули када број опита расте. Ове разлике, одступања од средње вредности, ограничене су дисперзијама, тако да код све већег броја опција збирно расипање разлика расте спорије од укупног броја опита. Другим речима, када број опита расте збир свих разлика подељен бројем опита тежи нули.

То је укратко скица „егзактног у небулозама случајности“ која нас доводи до закона великих бројева у математици због чега је тај закон теорема. При томе се подразумева да су опити независни: након десет бацања новчића и након што писмо падне у свих десет случајева опет је вероватноћа писма у следећем бацању иста као на почетку. Са друге стране, када је правилно схваћен и употребљен ЗВБ омогућава дугорочне прогнозе у пословима осигурања, у елиминацији случајних споредних фактора у медицини, у смањењу грешака понављањем мерења.

Најпознатија примена ЗВБ у оквиру саме теорије вероватноће је свођење поменуте Бернулијеве расподеле на *Гаусово звоно*. Прва је биномна расподела коју добијамо, на

[49] Siméon Denis Poisson 1781-1840, француски математичар, инжењер и физичар.
[50] Пафнутиј Чебишов 1821-1894, руски математичар.
[51] Андреј Марков 1856-1922, руски математичар.
[52] Émile Borel 1871-1956, француски математичар.
[53] Francesco Paolo Cantelli 1875-1966, италијански математичар.
[54] Андреј Колмогоров 1903-1987, руски математичар.
[55] Александар Хинчин 1894-1959, руски математичар.

пример, бацајући новчић сто пута и бројећи падања писма. Вероватније је да буде 40 писама него 30, али сваки број исхода „писмо“, од сто до нуле, има неку шансу. Списак вероватноћа тих бројева представља расподелу. Њу можемо тестирати бацањем свих сто новчића одједном или понављањима бацања једног новчића сто пута.

Закон великих бројева тада каже да се средње вредности исхода вишеструким понављањем сто бацања све више групишу око (прецизно дефинисаних) вероватноћа, говорећи чак и о корацима, степену тог приближавања. Када дуж хоризонталне осе (апсцисе) поставимо ознаке бројева догађаја, писама у сто бацања новчића, а њихове висине (ординате) значе бројеве свих реализација, добићемо граф звонастог облика, Гаусову расподелу вероватноћа.

Чудно, али не чудније од чињенице нам је скоро немогуће напамет издиктирати низ „случајних“ бројева који би прошао тест случајности. Тестови случајности постоје и заснивају се на ЗВБ, просто речено, на израчунатим очекивањима и средњим одступањима од очекивања. Није то лако контролисати напамет, па нагађајући бројеве око Гаусовог звона врло вероватно бар мало, али статистички значајно, промашујемо облик кривине његовог графа. Интуиција пада на тим тестовима већ код погађања односа рецимо 40 писама у сто бацања новчића према 30 писама од сто, а да не говорим о износу одступања очекивања у хиљаду понављања по сто бацања.

Наш проблем са тестовима случајности је тај што су они ствар математике, а интуиција је наивна за толику прецизност. Зато тестове случајности користимо за контролу превара у играма на срећу. Они реагују на скоро све „мудре“ покушаје имитирања „природне случајности“ захваљујући нашем потцењивању закона случајности или немогућности да га победимо. Са свођењем биномне расподеле у мноштву на звонасту, они су последица опадања неизвесности повећањем обима опита, а оно опет део је општег начела шкртарења емисијама актуелне информације из потенцијалне.

Да сличних тема има још демонстрираћу једном контрадикцијом. Сакупљањем разних неизвесности ради повећања могућности исхода неко створење могло би хтети да има све потенцијалне исходе. Желећи максималне слободе деловања, управо због закона великих бројева, оно би тада било максимално детерминистички вођено и потпуно неслободно.

Ударци Гаусовог звона
`http://izvor.ba/`
6. децембра 2019.

1.22 Квантни рачун

Класични компјутер настао је на математичкој логици, теорији информације и технологијама електричне струје.

Од древних Грка знамо за апсолутно тачне исказе, а однедавно умемо и да их „рачунамо“. Затим је ту откриће да „тачно“ и „нетачно“ можемо заменити бинарним цифрама (binary digit) – 1 и 0 – битима информације, па онда и техничким решењима „има струје“ и „нема струје“. Тако су микрочипови постали мозак компјутера начињен од густо интегрисаних кола која симулирају операције алгебре логике.

Упоредо са тим развојем ишао је током 20. века и развој квантне физике. Он је такође заснован на математици, али на алгебри вектора. Вектори су тамо квантна стања, односно суперпозиције могућности, које можемо називати расподелама вероватноћа. Појаве физике за које важе закони одржања симетричне су (теорема Еме Нетер)

и квантоване (јер коначни скупови не могу бити своји прави потскупови за разлику од бесконачних), а такве су и физичке информације. Зато информације могу путовати скоро без губитака и увек су дискретне.

Са становишта начелног шкртарења емисијама информације губици ће бити још мањи ако их преносимо у облику неизвесности, као неизјашњене исходе какви доминирају микросветом. То су ти вектори, низови који дефинишу вероватноће реализације појединих могућности квантних стања која су због коначне дељивости информације увек неке честице.

Од математичких ставова, њихових доказа, па до правних параграфа и политичких изјава, сви облици саопштења су у порцијама, у корацима, а такве су и обраде информације у компјутерима, класичним и квантним. Са друге стране, зато што су расподеле, вектори квантних стања су јединичне норме (дужине), а онда су такви и оператори који их пресликавају (унитарни).

Симетрија квантних процеса значи неку стабилност, промену стања у себи слично (својствено), али и реверзибилност, особину да се копирањем не губи претходна информација. Најпознатији квантни оператори су Адамарова и Паулијеве матрице а потрага за њиховим конкретним репрезентацијама постаје дневни посао многих физичара у свету.

Дакле, уместо класичних електричних кола за проток појединих бита, квантни процесор садржи квантне капије (gates). Оне обично пресликавају двокомпонентне векторе, кјубите (qubit) информације, а зато што је физичка информација увек истинита ствар (не може се десити оно што бисмо могли доказати да се не може десити) и због преферирања неизвесности испред изјашњавања, то је природнији начин. Друга прича је потрошња енергије.

Промена неизвесности у извесност, емисија активне информације из пасивне неко је дејство (производ промене енергије и протеклог времена). Отуда изводим принцип најмањег дејства познат у физици, што сада произилази из принципа минимализма (информације), који опет долази из сазнања да су вероватнији догађаји мање информативни и да су зато чешћи.

Замало исто приметио је и Ландауер 1961. године. Он је истицао да је поништавање информације расипнички процес, јер ће брисање неког записа у молекули на некој позицији термодинамичког распоређивања променити ентропију распореда. Ако се процес одвија на датој температури, производ температуре и промене ентропије је рад, па је Ландауер закључио да за промену информације неко мора да плати енергетски рачун.

Да енергетски рачун квантних компјутера може бити далеко скупљи од класичних, видећемо из следећа два примера.

Замислимо неку за нас „црну кутију“ која трансформише сваки од два сигнала, 1 или 0, у неки од та два сигнала. Класични компјутер установиће шта „кутија“ ради са два пролаза, посебно сликајући „кутијом“ нулу и посебно јединицу. Међутим, квантном је довољна једна копија, јер он не пресликава бит по бит, него кјубит (оба бита одједном). Па и нема неке разлике, рекли бисте, да није следећег примера.

Да испита сложенију „црну кутију“ са сто улазних кјубита који чине сто множених двојки варијација бита, што је број декадно писан са око 30 цифара, класичном компјутеру требају милијарде година, чак и ако би по пролазу трошио само милионити део секунде. Квантни компјутер би тај посао урадио зачас, у само сто пролаза.

Све оно што може израчунати квантни компјутер може и класични, само ако има довољно времена и меморије. Оно што су некада радиле електронске лампе, транзисто-

ри, па интегрална кола била је та формалност коју даље мењамо репрезентацијама Адамарове капије, Паулијевих матрица и других новијих из теорије и праксе квантне физике. Добијамо познато, али са застрашујућим разликама у могућностима, са фантастичним предностима и новим тешкоћама.

Енергетски рачун је толико пута већи колико и температура на којој се процес одвија, па квантне компјутере треба хладити до апсолутне нуле. Ниска температура у контрасту са околином појачава ефекат принципа информације и, према томе, смањује шум околине, али хлађење кошта и тепсија постаје скупља када пита пројефтини.

Разлике су и у врсти резултата. Квантно рачунање није више јасан детерминистички процес, оно је пресликавање суперпозиција опција, расподела вероватноћа, па понављање неће давати исте резултате него сличне чак и када закон великих бројева буде чинио квантни рачун веома „егзактним“, у оним најкомпликованијим ситуацијама због којих бисмо квантни компјутер правили.

Са квантним компјутером човек коначно добија интелектуално супериорнијег себи, машину способну да размишља природно, на начин својих градитеља.

Кусур квантног рачуна
`http://izvor.ba/`
13. децембра 2019.

1.23 АПР парадокс

Након потврда теорија релативности, у време преласка на теорије са постепеним деловањима на даљину, *локалношћу*, појавио се 1935. године заједнички научни рад Ајнштајна, Подолског и Розена (в. [21]) о питању комплетности квантно-механичког описа физичке реалности.

Тај рад се сматра открићем *не локалности* у процесу редукције таласног пакета, у почетку само *АПР парадоксом*, али временом и физике *квантне спрегнутости* (quantum entanglement).

На прве две од само четири странице АПР текста расправља се немогућност истовременог одређивања импулса и положаја честице. У структури квантне механике је Хилбертова апстрактна алгебра. Квантна стања (честице) су вектори, еволуције квантних стања, интеракције и мерења су линеарни унитарни оператори. Множење стања оператором је промена стања, а множење еволуције оператором је промена еволуције. За разлику од обичних бројева, ова множења нису увек комутативна (зависе од редоследа) и то је први проблем.

Да је квантна механика репрезентација поменуте апстрактне алгебре примећено је раније – била је позната и некомутативност оператора – али тек након *Хајзенберга* и 1927. године у томе је тражен физички смисао. Његово предлог су *релације неодређености* који имају класични алгебарски и информатички смисао.

Да би се што тачније лоцирао електрон употребљава се светлост што је могуће краће таласне дужине. Али таква има већу енергију и у судару повећава непредвидљивост импулса електрона. Користећи свој „мисаони микроскоп“ и дотадашња знања из физике, Хајзенберг је открио да је производ неодређености положаја и импулса честице у најбољем случају реда величине Планкове константе, кванта дејства.

Смисао Хајзенберговог открића у алгебри линеарних некомутативних оператора брзо је примећен. Разлика деловања првог па другог оператора и другог па првог

на квантно стање реда је величине кванта дејства и тај алгебарски резултат назван је *принципом неодређености.*

Наиме, оператор положаја мења положај електрона и поставља вредности другачије од оних које би настале променом импулса (масе и брзине) деловањем оператора импулса управо зато што су два оператора алгебарски зависна. Деловање једног утиче на деловање другог, а важност редоследа примене (множења) оператора положаја и импулса постаје зависност њима интерпретираних физичких величина.

Када оператори представљају зависне догађаје, први мења домен другога производећи другачији опсег коначних последица него када прво други поремети домен првога. Разлика исхода тих узастопних деловања у најбољем случају је квант дејства, даље додајмо најмањег могућег преноса информације. Међутим, када кажемо да оператори представљају независне догађаје, то значи да они узајамно не узурпирају домене један другога, па је свеједно који од њих први делује.

Стога квантна спрегнутост, односно редукција два квантна својства, има еквивалент у некомутативности оператора који их представљају. Следи информатички смисао.

Зависне величине су спрегнуте, а мерење је интеракција честице и апарата, њихова комуникација. Релације неодређености нам кажу да одузимањем неизвесности положаја расте неизвесност импулса честице, односно да повећање активне информације једног својства прати смањење другог, при чему су производи константни. То разумемо непосредно као одржање (количине) одговарајуће информације самог објекта али такође и њене „перцепције" од стране мерних уређаја.

Додаћу, због закона одржања имамо коначну дељивост (сваке) информације, њену појаву и перцепцију у ограниченим порцијама, па да бисмо на тако ограниченом медију повећали резолуцију слике у пикселима онда морамо смањити број фрејмова и покрет учинити нејасним. О томе сам писао раније, али не као овде са нагласком на спрегнутост, међусобну зависност појава, како самог објекта тако и његовог опажања.

У наставку АПР текста на следеће две странице разматрана је аналогна мало сложенија ситуација. Посматрају се два система (честица) који интерагују после чега међу њима више нема комуникације, али први систем (само први) меримо. Интеракција је „редукција таласног пакета" или „квантно спрезање". Након тога на првом систему вршимо мерења, а алгебра квантне механике показује промене такође и другог система!

Парадоксалност долази из ванвременске природе формула, јер други систем може бити веома удаљен. Ајнштајн је тај ефекат назвао „фантомским деловањем на даљину" и да апсурд не остане апстрактан смислио је пример са рукавицама. *Пар рукавица* је стављен у две одвојене кутије, веома раздвојене. Отварајући једну и сазнањем да је у њој рецимо лева, истовремено сазнајемо да је у оној далекој другој кутији десна рукавица пре него што би светлост отуда стигла да нас о томе информише.

За превазилажење АПР парадокса својевремено је најозбиљнијим предлогом сматрано тражење *скривених параметара.* Квантна механика је претпостављана некомплетном, нападан је и сам принцип неодређености (добри бог се не коцка – Ајнштајн). Ударано је и на саме алгебарске поставке квантне механике ако се већ у саму математику није могло сумњати. Јавност је покренута бомбастичним насловима у новинама попут „Ајнштајн руши квантну механику", али је читава ствар брзо заборављана. Није узета за научно озбиљну.

Три деценије касније ирски физичар Џон *Бел*[56] (О АПР парадоксу, 1964, [20]) нашао је контрадикцију у предлогу „скривених параметара". Довео је у противуречност саму

[56] John Stewart Bell 1928-1990), северноирски физичар.

идеју да се тешкоће АПР парадокса могу разрешити варијаблама додатим квантној механици. Такви параметри повратили би квантној механици каузалност (неслучајност) и локалност (постепеност дејства) по цену да нестане Хајзенбергових неодређености и обрнуто. Белова теорема доказује неспојивост идеје која би „скривеним параметрима“ разрешила АПР парадокс са статистичким карактером квантне механике, али је њен доказ веома тежак за разумети и тај рад је прошао незапажен.

Прекретница у данас великом и растућем интересовању физичара за квантну спрегнутост били су француски експерименти (1976), својевремени нови шок. На велико изненађење збуњених аутора који су експериментисали да би оспорили Белову теорему они су потврдили „фантомске“ последице квантне редукције. Отворили су ново поглавље физике које је за нас посебна тема.

Редукција таласног пакета
`http://izvor.ba/`
20. децембра 2019.

1.24 Генерализација ентропије

Питања, сумње и тумачења „начелног минимализма емисије информације“ ређају се и даље. Штавише, као да нарастају са учвршћивањем теорије.

Мало ко данас критикује закон одржања информације, а добро се држи и њена „стидљивост“, па и моје објашњење термодинамике, али неке генерализације ентропије као да чекају на боља времена.

Рецимо да су *империјализација* и *феминизација* друштва део ширег поменутог принципа, заједно са спекулацијама о расту способности апсорбовања различитих народа са првим, а опадању са другим. Појаснићу.

Реч *ентропија* (грч. обрт ка унутра) као појам увео је 1865. године немачки физичар и математичар Клаузијус сматрајући је мером енергије затвореног система топлотне машине која се више не може претворити у рад. За њега је то била само скраћеница у прорачунима, количник топлоте (енергије) и температуре. Нашао је да је у кружном процесу прираст ентропије сразмеран губитку топлоте, а обрнуто пропорционалан температури.

У *Шеноновој* дефиницији (1948) Клаузијусов разломак постао је мера изгубљене информације. Једноликих распореда куглица у кутијама има више него згуснутих, па се шире и молекуле ваздуха у соби. Ентропија је логаритам броја распореда, а вероватноћа је њихова реципрочна вредност. Логаритамска дефиниција ентропије је *Болцманова* из 1897. године, у почетку неприхваћена због непризнате идеје атома односно *молекула* гаса. Ентропија тако значи расутост и меру нереда.

Моја разматрања полазе од ових дефиниција. У наставку им прилажем закон одржања информације и њен минимализам, а то помало мења суштину. Познато је да теорије дају смисао чињеницама, што овде долази са околином топлотне машине која чува укупну информацију.

Осциловање молекула просторије преноси се на хладније вањске зидове. *Топлота* и *температура* излазе вани, осциловање слаби и остаје повећана ентропија. Како је ентропија количник топлоте и температуре то температура брже опада, па закључујемо да је осциловање молекула значајније температури него топлоти. Обе унутра спонтано опадају, а прелазак топлоте са тела више на суседно тело ниже температуре (приметимо:

из мање у већу ентропију) називамо другим законом термодинамике. Први је закон одржања енергије.

Са топлотом одлази и *информација* и у реду је рећи да је повећање ентропије сразмерно губитку информације. То је и у складу са тумачењем информације *дејством* (производ енергије и трајања, или импулса и дужине). Опадањем температуре опада живахност молекула коју овде разумемо сразмерну способности емитовања информације. Наводни настали *неред* пропорционалан је мањку топлоте, а оно што остаје аморфно је стање једноликих распореда, најмногобројнијих комбинација, а зато највероватнијих и најмање информативних.

Принципи информације изнад су делова физике и закона термодинамике. У том ширем концепту ентропија објашњава и закон *инерције*: тело не прелази спонтано из мировања у кретање, јер је релативна ентропија у кретању мања од сопствене!

Отуда *гравитација* смањује ентропију (многи се не слажу са овим тврђењем), па тело убрзава ка јачем пољу да би одржало ентропију. Посебно, пад чаше са стола и разбијање неповратан је процес, јер се заустављеној чаши ентропија повећа (молекуле се распу). Информација чаше делом иде подлози, а веома малим и у сам простор. Размењују се дејства.

Обрнуто, ако чашу у мировању удари покретан предмет и разбије је, предмет и чаша интерагују. Нема судара без промене количине кретања, импулса. Тело успорава, а парчићи чаше добијају на брзини односећи информацију, ентропија оба тела расте.

Информација није само пуки састојак супстанце, него и живота. Тежња ка неделовању, инерцији, облик је принципијелне стидљивости информације, окренутости ка себи, слабе и упорне универзалне силе. *Живо биће* са вишком је информације (и дејства) настале шкртарењем које се затим разблажује због истог начела. Губитак информације губитак је избора и деловања.

За квантна стања смањење опција појединог долази са спрегнутошћу (fidelity), за појединца у друштву са гушћим регулативама, али у сваком случају смањење информације значи већу узрочност и зависност, а опадање ризика и агресивности. Психолошки или економски то доживљавамо као повећање сигурности или ефикасности.

Уопште, процесе са спонтаним растом генералисане ентропије, својствене сваком облику живе материје (као и неживе), називам „феминизацијама“, а њима супротне и незнатно ређе тежње „империјализацијама“.

Империја је по класичној политичкој дефиницији јединица која окупља више народа под један ауторитет, као и царство, а апстрактно то би био информатички систем са вишком упуштања у вањске неизвесности, ризике, иницијативе, агресивности. Империјално и феминизовано друштво стижу са два противна смера „количина опција“, ка вани и унутра, као две формалне, свеприсутне и дуалне, али помало асиметричне појаве.

Тако је империја агресивна према вањском свету, у њеном присуству „спонтано“ се деле вањски учесници. Феминизирано друштво напротив уређује себе и фаворизује унутрашње тешкоће; уређивање тежи једноличности, назор изједначавању свачега, а када то није могуће – разврставању и поделама. Два процеса, империјализације и феминизације, попут буре на мору и смиривања један другог надвладавају, али никада не одустају.

Са наше стране гледајући, природа у сукобу својих супротности као да не зна куда би, она са неизвесношћу не би, а без ње не може. Неодређеност је њена суштина, али она бира изгледније исходе. Без непредвидљивости нема потребе за комуникацијом, од почетка би имали све, али различитости су толико велике да их је и самој природи превише.

Са њом не би, а без ње не може
http://izvor.ba/
27. децембра 2019.

1.25 Спрегнутост

Квантна спрегнутост (quantum entanglement) постаје нови „златни рудник“ физике. Она је магнет за генијалце жељне доказивања, за престиж института, војске имају своја очекивања, јер је издашнија за открића чак и од чачкања Церна по „стандардном моделу“ честица.

За две физичке појаве кажемо да су спрегнуте (уплетене) када промена на једној изазива промену на другој. Оне се тако могу мењати услед закона одржања, принципа најмањег дејства или неке треће нужности. Најпознатије су спрегнутости са спином (унутрашњи угаони момент), али ту су и неодређености импулса и положаја једне честице, па и непозната виртуелна деловања. Моја (хипо)теза је да њих поопштава „способност“ са „ограничењем“ у „слободи“ и остало што следи из *информације перцепције*.

Замислимо да имамо низ догађаја на којима можемо дефинисати парове величина, речених „способности“ и „ограничења“. Производ одговарајућег пара (истог догађаја) је „слобода“. Збир свих „слобода“ физичког система, његова укупна слобода, њему је придружена информација перцепције. Тај део је формално неспоран и тешко би га било срушити у физици.

Вектори су у основи низови које у једном случају називамо „интелигенцијом“, а у другом „хијерархијом“. Они су са истим бројем чланова – *димензијом вектора*, који у паровима дефинишу исте догађаје – први „способности“, а други „ограничења“.

Међутим, у ма колико димензионалном систему координата (обзервабли) они били дефинисани, два различита вектора одређују тачно једну раван. Они се могу увек свести на 2-дим систем координата, па је информација перцепције димензије два. То је један од новијих ставова.

Квантна стања су репрезентације вектора (Хилбертовог) простора, а њихови скаларни производи говоре нам о квантној спрегнутости. То се може поопштити делом и на макро-свет. У случају просте физичке супстанце, скаларни производ је укупна *слобода*. Она такође следи принципе одржања, минимализма и дејства информације од којих је најприхватљивији први. Спрегнути вектори су усклађени, они су зависни случајни догађаји и прате се попут електрона у електромагнетном пољу, произвођача и тржишта или травке и тла. А појаве извесности предвидљиве су и пре саопштења.

За сада, типична „свезана“ ситуација квантне механике је емисија честица познатог *спина*. Спин лако региструјемо у магнетним уређајима или поларизацијом и знамо да за њега такође важи закон одржања. Ако је укупни спин спреге нула и емитују се по две сличне честице, оне иду у два супротна смера због одржања укупног импулса, са укупним спином нула. Када су то емисије два електрона, а први је спина $+1/2$, онда је спин другог $-1/2$. Ако су то два фотона, два спина су $+1$ и -1.

Шта овде може бити чудно? Када се региструје само једна честица, њен позитиван и негативан спин појављују се као случајне величине. То је ствар проверена мерењима и законима теорије вероватноће. Али, након регистровања (случајног) првог спина, спин друге честице више није случајан догађај, иначе би нарушио закон одржања! Ма како друга честица била удаљена од прве, а време између два мерења краткотрајно,

спин друге увек је супротан првом. Тешко да би се експериментална физика на ово осврнула да јој то алгебра квантне механике није наметнула.

У данас чувеном, а својевремено незапаженом раду о АПР парадоксу (в. [20]), северноирски физичар Џон *Бел* је 1964. године разматрао спреге теоријски. Нећу вас замарати његовим израчунавањима која, узгред речено, мало ко данас и разуме, него ћу их само препричати. Квантим стањима је придружио параметре, било као низове бројева или низове вектора, па налазио противуречност. Њоме је доказао да је претпоставка недостајућих варијабли у алгебри квантне механике недопустива.

Са сазнањем да се покушај комплетирања квантне механике због избегавања АПР парадокса не може ускладити са стохастичком природом микросвета, нити са раније провереним Борновим законом (вероватноћа квантних мерења), Бел је своју анализу применио и на друге спрегнутости са истим резултатом. Било је узми или остави, све или ништа, а претходни експерименти већ су изузетно тачно потврђивали квантну теорију. Ту непријатну ситуацију физичари су дуго игнорисали.

Након више од деценије, Французи су први почели експериментисати са Беловим налазима и, као што знамо, *парадокс спрегнутости* постао је физичка реалност. Нова физика прихватила је експерименте са тренутним деловањем на даљину и апсурдну Белову теорему да без случајности нема нужности и обрнуто. Блаже речено, физика је кренула са уверењем да постоји спрега, испреплетеност вероватносне природе квантне механике и закона одржања.

Даља открића додатна су изненађења. Када делујемо на једном крају пара спрегнутих квантних система и тако постигнемо „ниоткуда“ појаву на другом удаљеном крају, произвели смо не-локално дејство налик преносу информације, односно *квантну телепортацију*. Ако смо то апсолвирали, шта онда рећи на наводно откриће „деловања садашњости на прошлост“, пријављено од Универзитета у Бечу (2012)? То је можда *ретрокаузалност* попут деловања виртуелног фотона на полазни електрон тек након реализованог деловања на другом електрону о којем сам писао раније.

Ако је прошлост нагомилавање информације садашњости, онда би ретрокаузалност (ход ка прошлости) могла бити сродна каузалности (ходу ка будућности). То нам уосталом поручују и унитарни оператори (еволуције) квантне механике, неизбежни и у програму информације перцепције.

Златни рудник физике
`http://izvor.ba/`
3. јануара 2020.

1.26 Дирихлеов принцип

Када јато голубова долети у голубарник и ако има више голубова него отвора, кућица у голубарнику, тада ће се бар у једном отвору наћи бар два голуба. То је оригинална верзија *Дирихлеовог*[57] принципа[58] који је ову идеју користио у неким проблемима из теорије бројева, касније називану и *принципом голубова* (енг. pigeonhole principle).

Када имамо 11 предмета распоређених у десет кутија, онда ће бар једна кутија садржавати бар два предмета или у сваком скупу од три природна броја бар два су

[57] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), German mathematician

[58] У математици, а посебно у теорији потенцијала, Дирихлеов принцип је такође претпоставка да је минимизатор одређеног енергетског функционала решење Поисонове једначине.

исте парности. Од ових очигледних примера примене принципа брзо се стиже до све мање очигледних: у свакој групи од 13 особа постоје две особе рођене у истом месецу, у групи од 3.000 особа бар девет слави рођендан истог дана, у одељењу са 35 ученика и 15 рачунара постоји рачунар за којим седе бар три ученика. У сваком скупу, са било колико особа, постоје бар две особе са истим бројем познаника.

Дирихлеов принцип, наравно, важи и у оној истој алгебри чија репрезентација је квантна механика. Зато су бомбастични наслови да квантна физика руши тај принцип, у неким популарним научним часописима, у другим стоји да га она на свој начин заобилази. Недавни експеримент Минг Ченг *Чена* са још девет аутора Кинеза (Experimental demonstration of quantum pigeonhole paradox, January 2019, [5]) пропушта три фотона кроз два поларизациона филтера, вертикални и хоризонтални, избегавајући „принцип голубова“.

Када филтери региструју пропуштање фотона, онда нема нарушавања принципа, али их има ако се мерења врше само накнадно дифракцијом фотона на излазу. Појава неодољиво подсећа на чувени експеримент *двоструки отвор* када изјашњавање на препреци пре искључује дифракцију, јер та комуникација „троши“ информацију, а према томе и енергију. То је разлог који се у студијама не помиње, јер се још увек информацији званично не признаје (не препознаје) дејство.

За сада је довољно знати да се појаве микросвета лакше трансформишу недефинисане, неизјашњене. Квантна стања су суперпозиције, расподеле вероватноћа и, на пример, фотон је са вероватноћом 0,6 вертикално поларизован, а са вероватноћом 0,4 хоризонтално. Колапс могућности у један исход је мерење, а наставак након колапса и без њега није исти процес, па је одржавање токова спонтаним, без агресивних интеракција и изјашњавања, прилика за „превару“ Дирихлеовог принципа.

Јакир *Ахаронов* са још пет аутора, три године пре Кинеза, објавио је једно слично истраживање (Quantum violation of the pigeonhole principle, January 2016, [11]). У сажетку њиховог рада пише: Проналазимо случајеве када се три квантне честице ставе у две кутије, а да се две честице не налазе у истој кутији. Надаље, показујемо да је горе наведени *квантни принцип голубова* само један од сродних квантних ефеката и указујемо на врло занимљиву структуру квантне механике која је до сада била незапажена. Наш резултат баца ново светло на саме појмове сепарабилности и корелације у квантној механици и на природу интеракција. Такође представља нову улогу *спрегнутости*, комплементарну уобичајеној.

Они су разматрали три честице и две кутије. Прескачем запис вектора квантног стања, али разумемо да било које две од три честице могу имати неку позитивну вероватноћу налажења у истој кутији. Они даље показују да постоје и случајеви када нема шансе да по две честице буду заједно. Дефинишу ортогонална стања, тако да постоји хермитски оператор у чијим сопственим вредностима (обзерваблама) су честице. Резултат су три честице (квантна стања) у две кутије, али тако да је у свакој од кутија највише по једна!

Њихова анализа открива значајне разлике у посматрању честица одвојено и заједно, додатно разликовању уопште мерења (квантног система на којем се врше снажније интеракције) и немерења. Описане разлике, пре и након раздвајања, увек су тамо као саставни део квантне механике, пишу у прилогу, а сваки пут када вршимо низ мерења можемо поделити оригинални скуп у више различитих, пре и после изабраних подскупова, према резултату коначног мерења и на сваком таквом подскупу можемо приметити сличан ефекат – да свака подела кошта.

Коначно, закључују, опште мерење је мерење (унитарним) оператором са спрегну-

тим својственим стањима (обзерваблама) и оно захтева или честице у интеракцији или трошење неких ресурса. Квантни ефект голубова је, према томе, пример новог аспекта квантне спрегнутости: мерењу је потребна повезаност да би се појавиле корелације које иначе постоје у непосредном стању.

Подсећам да је спрегнутост стање два квантна система (честица) представљено њиховим скаларним производом. Тај производ изражава вероватноћу интеракција, усклађеност и зависност, па уколико је већи веће је реаговање једног стања на друго, боље је праћење без саопштавања (емисије информације) и лакша су провлачења „испод радара“.

Поменуто објашњење је моје информатичко. Приметимо да оно појашњава горње описе и у случају разлика мерења на скуповима честицама пре и после раздвајања. Последица бољег спрезања је смањење емисије информације, оно је попут везивног ткива као код електрона у атому, код такмичара у *Нешовом еквилибријуму* (у којем би напуштање почетне стратегије угрозило играча) или *живих бића* (која поседују више информације од своје супстанце) адаптираних на своју околину. Иза свих ових појава стоји универзална тежња ка редукцији емисије информације.

Додатна слобода потребна је индивидуи да напусти колектив или додатни ризик потребан је играчу да изађе из добре позиције, аналогно вањској енергији потребној електрону да напусти атом. То нас враћа на горњу идеју да неизјашњавањем на „двоструком отвору“ пролази више информације односно енергије[59], слично поменутом ефекту фотона Кинеза.

Два квантна галеба бела
`http://izvor.ba/`
10. јануара 2020.

1.27 Циклус васионе

Разумео сам неизвесност информације и њен принципијелни минимализам, као и допринос теорије информације Дарвиновој еволуцији, каже ми један анонимни читалац и пита могу ли некако тако објаснити и *развој васионе*? Делови одговора које издвајам спекулативни су, али надам се да су занимљиви и поучни.

Генерално шкртарење комуникацијом је упорна и слаба „сила“ универзума. Отуда претпоставка да је рана васиона могла бити (скоро сва) од резултирајуће, неке крајње нежељене информације. Назовимо је супстанцом. Ова идеја је на први поглед у драстичној супротности са данас преовлађујућом теоријом о *великој експлозији* (big bang), али само на први поглед.

На почетку васионе било је минимално пасивне информације какви су простор и рецимо толерантни бозони (носиоци поља сила), али било је једнако много дејства (производа импулса са дужином), као и касније. Због закона одржања дејства и могућности „топљења“ његове ефективне информације у потенцијалну простор је растао. Губици прве добици су друге. То је у складу са природом информације и претпоставком да *простор памти*. Више физикално говорили бисмо о флуиду чије ширење је *гравитационо одбијање* супстанце, те о *негативној маси*.

Нема информације без неизвесности. Ми комуницирамо јер немамо све, а због истог поновљена „вест“ више није вест. Такође, из тренутка у тренутак свемир настаје

[59] теза моје теорије, иначе незапажена у физици

изнова, углавном највероватнији у односу на претходно стање, па је последица овакве информатике и *хронолошки континуитет* и доследност. Ова доследност равна је закону инерције, или тези да за вероватноћу такође важи неки (нови) закон одржања, али о њима нећемо сада.

Ако и дејства и импулси губитком супстанце остају константн, онда би се могле дешавати појаве као у теорији релативности. Расту релативна маса и енергија тела, повећавају се таласне дужине (Доплеров ефекат), а скраћују се јединице дужине и успорава време. Због споријег тока садашњег времена даље галаксије (старије) видимо релативно бржима, а сам видљиви свемир постаје нам све већи. Са друге стране, старије галаксије морале би се удаљавати релативно брже већ због више супстанце која је тада могла стварати више простора.

Стигли смо до толико несвакидашњих навода да их треба преиспитати. Онај део опште теорије релативности који настаје изједначавањем (кривине) простора са (тензором) енергије могао би да се уклопи у ову причу. Специјална теорија релативности, са своје стране, има додатни део о *Доплеровом ефекту* који би овде такође пристајао.

Наиме, релативно спорије протицање времена извора светлости опажано у кретању, у приближавању стиже нам из наше будућности, да би се у тренутку мимоилажења две садашњости изједначиле. Скраћивање релативне таласне дужине пристиглих фотона сада тумачим мањом *размазаношћу* и већом вероватноћом положаја. Обрнуто, светлост одлазећег извора све даље је у прошлости, она својим већим таласним дужинама дефинише мање извесна места.

Укратко, *будућност* је вероватнија. Третирамо ли простор и време формално тако да је развој догађаја премештање садашњости у простор-времену, еволуција ка будућности постаје „смер ка“ вероватнијим догађајима. Наглашавам, јер сличног објашњења физика за сада нема.

Дакле, супстанце је све мање и време је све спорије. Гравитација вуче тамо где време успорава, а успорени ток времена увећава релативну инертност тела, па према томе и *релативну енергију.* Исте твари имају све веће енергије на начин да је укупна енергија *садашњости* константна, па је закон одржања енергије валидан, као и дејства и информације.

Доследна информатичкој теорији била би зависност садашњости од прошлости. Ми смо и оно што смо били, а делом су такве и ствари. Сложенији системи лакше меморишу своју прошлост у супстанцу. За то имају све мање опција што су једноставнији, а најпростијима остаје само простор. Честицама се гомила садашњост и оне без „гепека“ остављају је успут.

Фотон путујући индукује своје електрично поље које индукује магнетно а ово опет електрично, из чега сада видимо комуникацију са простором. Информација је дводимензионална, са једном осом увек у смеру кретања, а са другом наизменично ка горе (електро), затим лево (магнетно), доле (електро) и десно (магнетно), у четири такта са укупно 720 степени једног циклуса.

Све су овакве (изометријске) трансформације неке ротације, а описана је дупла пуна ротација фотона у кретању. Он је *бозон* (в. [14]), међутим сличну ротацију за два пуна угла имају и сви *фермиони* (в. [15]), честице на које се поља сила (бозони) односе. За пример трага фермиона у простору узећу електрон.

Електрони комуницирају помоћу фотона. Сваки од њих у таласима емитује сфере виртуелних фотона, које ако интерагују са неким другим набојем постају реалне. Вероватноћа интеракције опада са површином сфере, али пренесени импулс остаје константан. Дејство иде и временски уназад, јер је интеракција непредвидљива и дешава се

након емисије. Најмање два дела описаног процеса новост су физици: да *Фајнманово* дејство виртуелним фотонима носи *сфера* а не линија, затим *ретрокаузалност.*

Ова прича о ширењу васионе можда је опис *тамне енергије*, а прича о прошлости опис *тамне материје.* Друга би била псеудо-реална (лакше делује на нас него ми на њу), нестајање супстанце значило би настајање тамне материје, раст засићености простора и вероватноће искакања виртуелних честица из вакуума, али ово су теме за неку другу прилику.

Информација као „стварност и истина“ нуди и већа чуда. Сваки део *тачне теорије* није у противуречности нити са једним делом нити једне тачне теорије, па би свако безбрижно теоретисање детаљима, док год је на терену тачног, могло бити тачно, али управо зато ни алтернативне „тамне материје“ не би нас изненадиле.

Супстанце је све мање и време је све спорије
`http://izvor.ba/`
17. јануара 2020.

1.28 Атом водоника

Најједноставнији физички систем који садржи интеракције потенцијала (није изолована честица) јесте *атом водоника.* Чине га један протон, један електрон и електростатички *Кулонов потенцијал* који привлачи позитивна и негативна наелектрисања протона и електрона и држи их заједно, а опада са њиховом међусобном удаљеношћу. Као квантни систем то је једини модел атома чије нам је решење *Шредингерове једначине*, за сада, сасвим познато.

Укратко, вероватноће налажења електрона у атому водоника описује производ три таласне функције које дефинишу редом његов радијус, меридијан и паралелу (азимут). Помало слободно назване то су три променљиве *сферног система* координата, редом за удаљеност од језга атома (исходишта), угао (фи) у главној, хоризонталној равни и угао (тета) отклона од те равни.

Радијална функција има решења само за енергије које познајемо још из *Боровог модела атома.* Електрон орбитира око језгра попут планета Сунчевог система на квантованим удаљеностима са редним бројем који називамо *главни квантни број*, ознаке n. Потенцијална (негативна) енергија електрона на орбити опада са квадратом тог броја, зависно од површине сфере и броја могућих стојећих таласа.

Са становишта теорије информације рећи ћемо да негативној енергији припада негативно дејство (производ енергије и времена) и дефицит информације у односу на неутрално стање. *Мањак информације* је привлачан. Електрон тада у стационарним таласима не осећа Кулонову привлачну силу и то је аналогно бестежинском стању у сателиту у слободном паду у гравитационом пољу.

Негативном потенцијалу електрона мора се додати (позитивна) енергија да он изађе из језгра на вишу орбиту ка неутралном стању информације. За разлику од Боровог модела атома, решења Шредингерове једначине могу бити и позитивне енергије, дакле *позитивне информације*, тада за слободне електроне.

Кретањем, орбитирањем електрона око језгра настаје магнетисање које налазимо у решењу меридијалног фактора (фи). Оно је придружено само целим бројевима које називамо *магнетним квантним бројевима*, ознаке m. Кретање електрона представља електричну струју која индукује магнетно поље па присуство магнетног квантног броја

сведочи о кретању електрона по *орбити*, иако је оно до те мере „размазано“ да нема смисла говорити о тачнијим положајима.

Претпоставка о тачним положајима електрона водила би теорију у контрадикцију. Зато ћемо рећи да се због магнетног квантног броја електрон понаша као „исход“ случајног догађаја, али и као „могућност“ због размазаности. То су два стања процеса смењивања актуелне и потенцијалне информације електрона. Електрон не осцилује само у простору (временом) око протона, него и динамички. Појаснићу.

Квантни систем је репрезентација Хилбертове алгебре, *квантна стања* представљају њени вектори, а квантни процеси су еволуције квантних стања представљене линеарним унитарним операторима. На крају, вектори стања су увек неке честице просто зато што је „свако својство информације дискретно“ (последица закона одржања), али како сами поменути оператори такође чине неки векторски простор (дуалан првом) то су онда и квантни процеси опет и „честице“. Обе врсте вектора се, свака на свој начин, своде на исте законе квантне механике.

Трећи фактор решења, који дефинише азимут (тета), зависи од ненегативног целог броја названог орбитни, угаони или *азимутни квантни број* ознаке ℓ. Решавањем Шредингерове једначине налазимо да он не може бити већи од магнетног квантног броја и да је мањи од главног квантног броја.

Редни број љуске, главни квантни број горња је (недостижна) вредност азимутног квантног броја који је (достижна) граница апсолутних вредности магнетног квантног броја електрона. Другим речима, азимутни квантни број својим ограничењима дефинише степене слободе електрона у атому, а тиме и могућности попуњавања љуски атома.

Четврти квантни број је *спин* (ознаке s). Спин електрона има само позитивну или негативну вредност половине. Он не зависи од Кулонове силе и не долази уз описано решење Шредингерове једначине. Међутим, два електрона у атому не могу имати сва четири квантна броја једнака, јер то забрањује *Паулијев принцип искључења*.

Полазећи од Паулијевог принципа и узимајући у обзир горња решења, електрони се слажу у љуске атома тако да добијамо *периодни систем елемената* познат у хемији. То је својеврсна потврда квантне механике.

Кретање атома водоника
`http://izvor.ba/`
24. јануара 2020.

Glava 2

Формализам

Текст који следи завршен је током маја и јуна 2019. године, а биће штампан као други део књиге (претпостављам „Минимализам информације“) следеће године. У међувремену први део књиге рашће са једним по једним популарним прилогом, надам се, моје колумне медија „Извор.ба“. Трудићу се да се у тим прилозима бавим отприлике темама из овог дела књиге.

Основа приче која следи је *информација перцепције*, раније дефинисана (в. [10]), која се формално може писати као скаларни производ низова, па онда и вектора. Она је ограничена са доње и горње стране сразмерношћу одговарајућих парова, фактора поменутог збира, прецизније исказано теоремом 2.1.3. Грубо речено, доње вредности информације перцепције припадају *неживом свету* физике, горње *живом свету*.

Информацију перцепције од раније називам и укупном слободом (либертас), а њене сабирке појединим слободама, што ће сада доћи до изражаја када приметимо да се те слободе могу представити као Хартлијеве информације. Затим се бавимо доказима да је информација перцепције дводимензионална, да је она дејство, те да је у случају неживих тела физике она решење Ојлер-Лагранжових једначина, чији је један познати доказ, извођење принципом најмањег дејства, овде приложен.

Принцип најмањег дејства овде третирамо као принцип најмање информације, што значи да познате трајекторије физике сада постају последице информатике. Формални докази су ту, а интуитивна објашњења углавном потражите у првом делу ове књиге. На пример, недавна (позната) извођења Ајнштајнових једначина поља из принципа најмањег дејства сада постају извођења из информације перцепције, па имамо неколико начина да се до њих дође. Први је Ајнштајнов, из разматрања инерцијалних кретања и везе енергије-масе са геометријом, други је Риманов са *геодезицима* као линијама најкраћих удаљености, затим линијама најмање промене енергије, а сада и линијама најмање емисије информације.

Тежина тензорског рачуна и трансформација у коју нас таква разматрања уводе главни су разлог за предах од математике, због чега сам пресекао и одложио наставак књиге за можда неке касније текстове.

На крају сам навео једно лагано извођење Шредингерове једначине које повезује (моју) теорију информације са квантном механиком. У најави развоја овог текста, који овде није наведен, било би формирање Ајнштајнове једначине поља помоћу принципа најмањег дејства, поопштавање те једначине на произвољан број D димензија, па њено свођење на Клајн-Гордонову једначину квантне механике. Међутим, то је тема за неки други текст.

2.1 Скаларни производ

Нека је $n \in \mathbb{N}$ дати природни број. Векторе, уређене n-торке комплексних бројева:

$$\vec{I} = (I_1, I_2, \ldots, I_n), \quad \vec{H} = (H_1, H_2, \ldots, H_n), \tag{2.1}$$

где су њихове компоненте, односно коефицијенти $I_k, H_k \in \mathbb{C}$ за $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, називамо редом *интелигенцијом* и *хијерархијом*. Њихов *скаларни производ*, популарним квантно механичким бра-кет, иначе *Дираковим*[1], ознакама пишемо

$$L = \langle \vec{I} | \vec{H} \rangle = I_1^* H_1 + I_2^* H_2 + \cdots + I_n^* H_n, \tag{2.2}$$

где је I_k^* коњугован комплексан број I_k и називамо *информацијом перцепције*. Када су сви дати бројеви реални, скаларни производ који се иначе назива и тачка производ, можемо писати класично $\langle \vec{I} | \vec{H} \rangle = \vec{I} \cdot \vec{H}$. Сабирак $L_k = I_k^* H_k$ информације перцепције називамо и k-том *слободом*, а збир

$$L = \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} I_k^* H_k \tag{2.3}$$

тј. (2.2), називамо и укупном слободом.

Пример 2.1.1 (Тест)**.** *Особа полаже тест предвиђених задатака разних тежина на којима осваја неке бодове.*

Објашњење. Дата особа полаже дати тест са $n = 1, 2, 3, \ldots$ задатака. За решење k-тог задатка ($k = 1, 2, \ldots, n$) добије $I_k \in \mathbb{R}$ бодова, при чему је процењено да k-ти задатак има тежину $H_k \in \mathbb{R}$. Коефицијенти интелигенције и хијерархије овде су реални бројеви и, наравно, ови бројеви могу бити међусобно различити. Већој слободи L_k овде одговара „интересантнији“ задатак, такав који тражи веће мајсторство, па доследно томе I_k можемо називати *способношћу* испитаника, а H_k тешкоћама или *ограничењем*. □

Када су слободе L_k природни бројеви, па донекле и када су реални, следеће изразе редом има смисла називати неком „количином“, бројем опција, односно неком средњом „вероватноћом“ тих опција:

$$N_k = e^{L_k}, \quad P_k = e^{-L_k}. \tag{2.4}$$

Овде је $e = 2,71828\ldots$ *Ојлеров*[2] број, база природног логаритма. Како је $N_k P_k = 1$, тада је $\ln N_k = -\ln P_k$, па је

$$L_k = \ln N_k \tag{2.5}$$

нека одговарајућа „Хартлијева информација“. Ово даље поопштавамо на комплексне бројеве „способности“ и „ограничења“ да бисмо могли користити исте термине у области квантне механике.

Лема 2.1.2. *Из $a \geq b$ и $x \geq y$ следи:*

$$ax + by \geq bx + ay, \tag{2.6}$$

при чему једнакост важи ако и само ако $a = b$ и $x = y$.

[1] Paul Dirac (1902-1984), енглески теоријски физичар.
[2] Leonhard Euler (1707-1783), швајцарско-руски математичар.

Доказ. Тврђење следи из:

$$(ax + by) - (bx + ay) = (ax - ay) - (bx - by) = (a - b)(x - y) \geq 0.$$

Због релација поретка подразумева се да су сви ови бројеви реални. □

Када су коефицијенти интелигенције и хијерархије поредани оба у опадајуће низове, или оба у растуће, слобода је максимална. Када су поредани супротно, један растући а други опадајући, слобода је минимална. Да то важи у општем случају тврди следећа теорема[3].

Теорема 2.1.3. *Нека су коефицијенти хијерархије из (2.1) у опадајућем поретку*

$$H_1 \geq H_2 \geq \cdots \geq H_n.$$

Нека су у растућем поретку ($I'_1 \leq I'_2 \leq \cdots \leq I'_n$) коефицијенти интелигенције $\vec{I}'$, у опадајућем ($I''_1 \geq I''_2 \geq \cdots \geq I''_n$) коефицијенти интелигенције $\vec{I}''$, а произвољно поредани коефицијенти (I_k) интелигенције $\vec{I}$ из (2.1). Тада је

$$L' \leq L \leq L'',$$

где су $L' = \vec{I}' \cdot \vec{H}$ и $L'' = \vec{I}'' \cdot \vec{H}$ одговарајуће слободе.

Доказ. Пођимо од неуређеног низа $\vec{I}$ и уређујмо га *сортирањем мехуром*[4] (енг. bubble sort), а сваки пут када се деси замена пара суседних коефицијената позовимо се на претходну лему.

Посматрамо парове суседних коефицијената I_k и I_{k+1} за $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ ради сортирања у растућем поретку. Ако је $I_k > I_{k+1}$ заменимо им места у интелигенцији, а ако није оставимо их где су. Када се год деси замена, према претходној леми, вредност слободе се смањи. Пролажење кроз све парове суседних коефицијената понављамо изнова и изнова све док у датом пролажењу постоји макар једна замена. Процес је завршен ако нема замена и тада је $L' \leq L$.

Посматрамо парове суседних коефицијената I_k и I_{k+1} за $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ ради сортирања у опадајућем поретку. Ако је $I_k < I_{k+1}$ заменимо им места у интелигенцији, а ако није оставимо их где су. Када се год деси замена, према претходној леми, вредност слободе се повећа. Када се процес сортирања заврши, тада је $L \leq L''$.

Тиме је теорема доказана. □

Када имамо збир парова производа и формирану укупну слободу (2.2), тј.

$$L = I_1H_1 + I_2H_2 + \cdots + I_nH_n, \tag{2.7}$$

онда сабирке можемо распоредити на произвољан начин, јер важи закон комутације за сабирање. Зато, укратко, кажемо да множећи веће са мањим (или мање са већим) коефицијенте интелигенције и хијерархије добијамо минималну укупну слободу, а множећи веће са већим (и мање са мањим) коефицијенте интелигенције и хијерархије добијамо максималну укупну слободу.

У наставку текста приметићемо да за дати природни број $n = 1, 2, 3, \ldots$ и n-торке реалних бројева $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ постоји такав n-димензионални Декартов правоугли *систем координата* $OX_1X_2 \ldots X_n$ у којем су они оријентисане дужи, односно вектори, са почетком у исходишту O, а врхом са датим низом координата.

[3] Обједињен пример 1.5.3. из [10] и теорема 1.2.7. из [8].

[4] Баблсорт: `https://sr.wikipedia.org/sr-ec/Sortiranje_mehurom`

2.2 Вектори

Нека је дат n-дим Декартов правоугли систем координата $OX_1X_2\dots X_n$ са реалним векторима $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ и $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. *Интензитети* ових вектора су:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}, \tag{2.8}$$

где горњи индекси представљају квадрирања реалних бројева. Ортогоналне *пројекције* ових вектора на координатне осе редом су:

$$\vec{u}_{x_k} = |\vec{u}| \cos\alpha_k, \quad \vec{v}_{x_k} = |\vec{v}| \cos\beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{2.9}$$

где су α_k и β_k углови између првог односно другог вектора и X_k-те координатне осе. Отуда следи:

$$|\vec{u}|^2 = |\vec{u}|(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \dots + \cos^2\alpha_n), \tag{2.10}$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}|(\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \dots + \cos^2\beta_n), \tag{2.11}$$

односно

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \dots + \cos^2\alpha_n = 1, \tag{2.12}$$

када је вектор јединични, $|\vec{u}| = 1$. Подсећам, поред још једног начина, овако је објашњен *Борнов*[5] закон вероватноћа квантних стања у књизи Квантна механика [4].

То исто погледајмо сада детаљније. Ставове нама добро познате из елементарне математике овде само преузимамо, а неке евентуално и доказујемо. Пре свега ту спадају разлагања вектора по координатним осама, употребом јединичних вектора тих оса, кратко кажемо *ортова*, затим особине, својства операција сабирања и множења тако представљених вектора. Ово је део градива средње школе који ћемо зато поновити кроз примере.

Пример 2.2.1 (Ортови)**.** *Дефинишимо дате векторе, $\vec{u}$ и $\vec{v}$, система $OX_1\dots X_n$ помоћу ортова и наведимо својства сабирања и множења.*

Решење. Означимо јединичне векторе система $OX_1\dots X_n$ редом са $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, тако да можемо писати

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + \dots + u_n\vec{e}_n, \quad \vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \dots + v_n\vec{e}_n. \tag{2.13}$$

Сабирање вектора је *комутативно*, што значи

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \tag{2.14}$$

за сваки пар вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ и важи својство *линеарности*

$$p\vec{u} + q\vec{v} = (pu_1 + qv_1)\vec{e}_1 + \dots + (pu_n + qv_n)\vec{e}_n, \tag{2.15}$$

за сваки пар реалних бројева p и q.

Скаларно множење вектора такође је комутативно. За скаларно множење датих ортова важи:

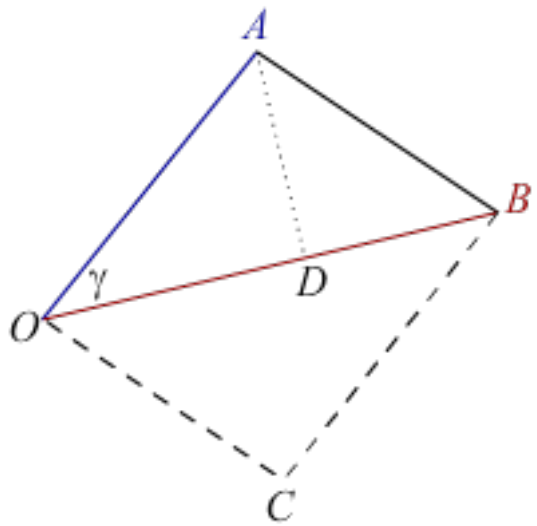
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{2.16}$$

где је δ_{ij} *Кронекеров*[6] *делта симбол*, за $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, па за интензитет поново налазимо (2.8), као и за скаларни производ (2.2), што је лако проверити. □

[5] Max Born (1882-1970), немачко-јеврејски физичар и математичар.

[6] Leopold Kronecker (1823-1891), пруски математичар.

Као што знамо, вектори су једнаки ако и само ако имају исти правац, смер и интензитет. Зато дате векторе можемо *транслирати* (паралелно померати) тако да је $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, као што се види на слици 2.1.



Slika 2.1: Паралелограм.

На супротним страницама паралелограма $OABC$ налазе се једнаки вектори:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}, \quad \vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}, \tag{2.17}$$

а угао између дијагонале OB паралелограма и странице OA је $\gamma = \angle(BOA)$. Као што знамо из тригонометрије, у произвољном троуглу попут ΔOAB важи *косинусна теорема*

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos\gamma, \tag{2.18}$$

где је $|AB|$ дужина странице AB датог паралелограма, а угао $\gamma = \angle(BOA)$.

Пример 2.2.2 (Косинусна теорема)**.** *Доказати једнакост (2.18).*

Доказ. Из правоуглих троуглова ΔADB, ΔADO и *Питагорине теореме* добијамо:

$$|AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2, \quad |AD|^2 = |AO|^2 - |OD|^2,$$

$$|AB|^2 - |BD|^2 = |AO|^2 - |OD|^2,$$

$$|AB|^2 = |AO|^2 + |BD|^2 - |OD|^2,$$

$$|AB|^2 = |AO|^2 + (|OB| - |OD|)^2 - |OD|^2,$$

$$|AB|^2 = |AO|^2 + (|OB|^2 + |OD|^2 - 2|OB||OD|) - |OD|^2,$$

$$|AB|^2 = |AO|^2 + |OB|^2 - 2|OB||OD|,$$

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OB||OA|\cos\gamma,$$

јер је $|OD| = |OA|\cos\gamma$. То је тражена једнакост (2.18). □

Када је $\gamma = 90°$, тада је $\cos\gamma = 0$, ΔOAB је правоугли троугао са правим углом у темену O, па (2.18) постаје Питагорина теорема. Према томе, косинусна теорема поопштава Питагорину теорему на троуглове који нису правоугли. Даље, помоћу косинусне теореме може се, поред (2.2), извести још једна формула за скаларни производ вектора.

Пример 2.2.3 (Скаларни производ)**.** *Доказати*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\gamma, \tag{2.19}$$

помоћу косинусне теореме.

Доказ. Према косинусној теореми и датим ознакама је

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\gamma.$$

Затим, скаларним множењем налазимо:

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{v} - \vec{u}|^2 = (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) =$$

$$= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Упоређујући ово са косинусном теоремом добијамо

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\gamma,$$

а то је оно што је требало доказати. □

Узимајући да смо скаларни производ на почетку дефинисали са (2.2), имамо

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\gamma. \tag{2.20}$$

На слици паралелограма 2.1, окомита (ортогонална) *пројекција* тачке A на дијагоналу OB је тачка D. Према дефиницији косинуса, опет због $|OD| = |OA| \cos\gamma$ (као у доказу косинусне теореме), имамо и

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (|OA| \cos\gamma)|OB|. \tag{2.21}$$

Другим речима, скаларни производ вектора једнак је производу (дужине) пројекције првог на други и интензитета другог вектора. А то је такође познато из елементарне математике.

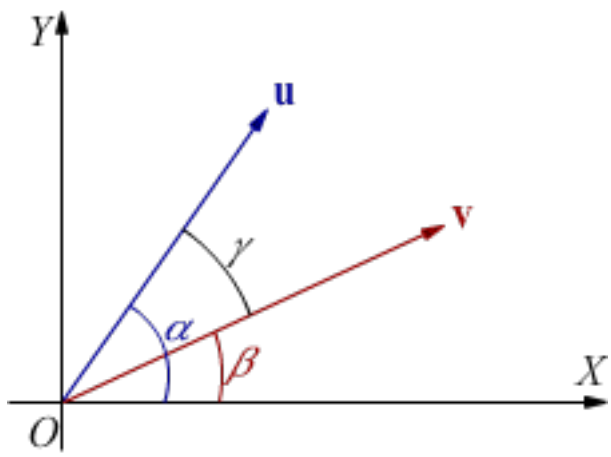
Ма колико координатних оса да има поменути систем, дати вектори, ако су различитог правца и заједничког исходишта, дефинишу једну и само једну раван. На слици 2.2 дати вектори означени су масно, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, у Декартовом правоуглом систему OXY. Углови између апсцисе и тих вектора су редом $\alpha = \angle(XO\mathbf{u})$ и $\beta = \angle(XO\mathbf{v})$, а угао између вектора, наравно, је $\gamma = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Јасно је да

$$\gamma = \alpha - \beta. \tag{2.22}$$

Искористимо то за доказ адиционе формуле косинуса разлике

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta, \tag{2.23}$$

што је иначе такође добро позната формула тригонометрије.



Slika 2.2: Вектори у једној равни.

Пример 2.2.4 (Косинус разлике)**.** *Доказати адициону формулу (2.23).*

Доказ. За *скаларни производ* датих вектора важи (2.20), па имамо:

$$u_x v_x + u_y v_y = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\gamma,$$

$$|\mathbf{u}| \cos\alpha |\mathbf{v}| \cos\beta + |\mathbf{u}| \sin\alpha |\mathbf{v}| \sin\beta = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\gamma,$$

$$\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta = \cos\gamma,$$

а то је тражена формула (2.23). □

Приметимо да су *норме вектора* (интензитети) сада

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \tag{2.24}$$

и да је то посебан случај (2.8). Посебан случај је и редуковани облик фомуле (2.20) како је она употребљена у доказу косинуса разлике. Међутим, исти „посебан случај“ редукције информације перцепције има за нас далекосежно значење. Ако су обзервабле (физички мерљиве величине) репрезентације координатних оса, онда можемо рећи да смо информацију перцепције (L) са n обзервабли (2.9) свели на само две „обзервабле“. За те две опет важи теорема 2.1.3.

2.3 Дејство

Управо смо видели да је информацију перцепције увек могуће свести у једну раван. Од раније знамо да је неизвесност основни произвођач информације, да сила мења неизвесност, те да су обе, отимање информације из неизвесности и насиље над њом, неспонтани догађаји. Одговарајућу спонтаност називамо *начелом минимализма.*

Због начела минимализма и теореме 2.1.3, у трагању за елементарном физичком информацијом неизбежно је разматрање Хајзенбергових релација неодређености као модела[7]. Неодређеност импулса и положаја посматране честице, једнако за сваку од три просторне координате (дужину, ширину и висину), као и неодређеност њене

[7] в. [8], пример 1.1.2.

енергије и времена, добри су кандидати за „способност“ и „ограничење“ као фактори сабирка „слободе“ (2.2), односно информације перцепције. Штавише, природа њихових производа (када је први фактор већи други је мањи и обрнуто) говори о минимализму „слобода“.

За „Хајзенбергове слободе“ дефинишемо скаларни производ

$$L = \Delta p_x \Delta x + \Delta p_y \Delta y + \Delta p_z \Delta z - \Delta E \Delta t, \tag{2.25}$$

где уместо сабирака, попут $\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ или $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$, могу стајати и производи

$$\sigma_p \sigma_x \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{2.26}$$

при чему је σ уобичајена ознака за дисперзију, овде импулса и положаја, а затим и енергије и времена. Као што знамо, $h = 6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$ Js је *Планкова константа*, а $\hbar = h/2\pi$ је њен редукован облик.

У следећој теореми посматрамо „информацију перцепције“, неодређеност (2.25), у два инерцијална Декартова правоугла система координата K и K' при чему се K' креће дуж апсцисе константном брзином v у односу на K, а у почетном тренутку $t = t' = 0$ координатне осе им се поклапају: $x = x'$, $y = y'$ и $z = z'$.

Теорема 2.3.1 (Лоренцове трансформације)**.** *Показати да је*

$$\begin{cases} \Delta p'_x = \gamma(\Delta p_x - \beta \Delta p_t) \\ \Delta p'_t = \gamma(\Delta p_t - \beta \Delta p_x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta \Delta ct) \\ \Delta ct' = \gamma(\Delta ct - \beta \Delta x), \end{cases} \tag{2.27}$$

где је $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$. *Са* $\beta = \frac{v}{c}$ *ово постају Лоренцове трансформације.*

Доказ. Неодређеност (2.25) је иста у оба система K и K', па имамо:

$$L' = \Delta p'_x \Delta x' - \Delta p'_t \Delta ct' =$$

$$= \gamma(\Delta p_x - \beta \Delta p_t) \cdot \gamma(\Delta x - \beta \Delta ct) - \gamma(\Delta p_t - \beta \Delta p_x) \cdot \gamma(\Delta ct - \beta \Delta x)$$

$$= \gamma^2(1-\beta^2)(\Delta p_x \Delta x - \Delta p_t \Delta ct) = L,$$

јер је $\Delta p_x \Delta ct = \Delta p_t \Delta x = 0$. Из инваријантности, $L' \equiv L$, следи $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$, што је и требало показати. Интерпретација *Лоренцових*[8] кретања даје $\beta = \frac{v}{c}$. □

Познато је да нема промена окомито на смер кретања, па трансформације у правцу ординате и апликате овде игноришемо. У теореми не дајемо посебну вредност релативистичком коефицијенту гама, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, нити користимо друге резултате, осим претпостављене *симетрије* у трансформисању датих неодређености. Исто би добили са дисперзијама (2.26). Тиме постижемо лакшу интерпретацију коефицијента γ не само у специјалној *теорији релативности*, као овде, него и даље у општој.

Употреба само две димензије за дефинисање трансформација (2.27) у складу је са претходно речном сводљивошћу информације перцепције. Као што је познато, четврта координата простор-времена Минковског често је $x_4 = ict$, где за имагинарну јединицу важи $i^2 = -1$, а $c = 299\,792\,458$ m/s је *брзина светлости* у вакууму. Тада се за четврту координату импулса узима $p_t = iE/c$, а отуда израз (2.25) и смене у доказу. Поменута теорема, наравно, важи и за трансформације самих координата,

[8] Hendrik Lorentz (1853-1928), холандски физичар.

правца кретања и времена система K и K'. Због важности за овај текст подсетимо се неколико историјских открића[9].

Галилејеве[10] трансформације

$$x' = x - v_x t, \quad y' = y - v_y t, \quad z' = z - v_z t, \quad t' = t, \tag{2.28}$$

су побољшаване Лоренцовим, првенствено због експеримената Мајкелсона и Морлија. Експериментима М-М је од 1887. године установљено да се „светлост креће увек истом брзином у вакууму“, око $c = 3 \times 10^8$ m/s, без обзира на брзину извора. Сазнање М-М експеримената је *Ајнштајн* узео за свој други принцип у раду који је објавио 1905. године, а који је данас познат као специјална теорија релативности. Први принцип му је био релативност кретања, да „физички закони система у којем посматрач мирује не зависе од тога да ли се тај систем креће“ једнолико праволинијски у односу на неко друго тело или посматрача.

Укратко, Ајнштајнови *принципи релативности* су: 1. сва једнолико праволинијска кретања су равноправна и 2. брзина светлости у вакууму не зависи од брзине извора.

Пример 2.3.2. *Извести Лоренцове трансформације из Ајнштајнових принципа.*

Решење. Ајнштајнова релативност за четврту координату користи ct а то је пут који светлост пређе за време t. За систем K' који се креће брзином v у односу на систем K дуж апсциса, у најопштијем случају можемо ставити:

$$x' = \gamma(x - \beta\, ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = A\, ct - Bx, \tag{2.29}$$

где су γ, β, A, B непознати бројеви које тек треба одредити. Прва и четврта координата су функције зависне од узајамне брзине v кретања два система и евентуално још једино од брзине светлости c. Ове трансформације би постале Галилејеве (2.28) ако би било $\gamma = 1$, $\beta = v/c$, $A = 1$ и $B = 0$.

Када неки објекат мирује у K' на позицији $x' = 0$, он се креће константном брзином v апсцисом система K, тако да је $x = vt$, па је $\beta = v/c$ те $x' = \gamma(x - \frac{v}{c}\, ct)$. Према принципу релативности, инверзне трансформације између K' и K морају имати исту форму али са брзином супротног предзнака, па налазимо $x = \gamma(x' + \frac{v}{c}\, ct')$ за исти коефицијент γ. При томе је $t = x/c$ када год је $t' = x'/c$ и сменом у претходне једнакости затим множењем добијамо $xx' = \gamma^2(1 - v^2/c^2)xx'$. Отуда, за прву једначину:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{2.30}$$

Први коефицијент се назива и Лоренцов фактор и већ смо га помињали. Једначина из (2.29) која дефинише трансформацију времена, може се добити из услова $x' = ct'$ и $x = ct$ сменом у претходне просторне координате одакле $ct' = \gamma(ct - \beta x)$. Према томе, Лоренцове трансформације су:

$$x' = \gamma(x - \beta\, ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x), \tag{2.31}$$

где су γ и β дати са (2.30). □

[9] Узето из: [8], одељак 1.4.1. Лоренцове трансформације.

[10] Galileo Galilei (1564-1642), италијански математичар.

Сабирци у (2.25), па онда и збир L, имају физичку димензију дејства. Према томе, теорема 2.3.1 нам каже да су обоје, како информација перцепције тако и дејство, инваријантни на Лоренцове трансформације. Дејство је квантовано па за њега такође важи *закон одржања* аналогно информацији[11]. Отуда нагађамо да су информација перцепције и физичко дејство формално еквивалентни.

Да ово „нагађање“ има дубљи смисао види се из интерпретације *Питагорине теореме* као врсте дејства. Посматрамо ли дужине и трајања околине дате тачке простор-времена Минковског (специјалне теорије релативности), имамо 4-интервал

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2, \tag{2.32}$$

где горњи индекси представљају квадрирање интервала и брзине светлости. Израз поопштава Питагорину теорему на простор-време Минковског, а такође је инваријантан на трансформације (2.31), као и дејство (2.25).

Пример 2.3.3. *Доказати да је (2.32) инваријанта Лоренцових трансформација.*

Решење. Користећи дате ознаке имамо:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta\, c\Delta t), \quad c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x),$$

$$(\Delta x')^2 = \gamma^2(\Delta x - \beta\, c\Delta t)^2, \quad c^2(\Delta t')^2 = \gamma^2(c\Delta t - \beta\Delta x)^2,$$

$$\begin{cases} (\Delta x')^2 = \gamma^2[(\Delta x)^2 - 2\beta\,\Delta x\, c\Delta t + \beta^2\, c^2(\Delta t)^2] \\ c^2(\Delta t')^2 = \gamma^2[c^2(\Delta t)^2 - 2\beta\, c\Delta t\,\Delta x + \beta^2\,(\Delta x)^2]. \end{cases}$$

Отуда одузимањем:

$$\begin{aligned} (\Delta x')^2 - c^2(\Delta t')^2 &= \gamma^2[(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2] - \gamma^2\beta^2[(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2] \\ &= \gamma^2(1-\beta^2)[(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2] \\ &= (\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Додавањем квадрата интервала остале две координате добијамо $(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2$, а то је оно што је и требало доказати. □

Када (2.32) помножимо масом m посматране честице и поделимо временом Δt промене положаја координатног система, добијамо израз (2.25). Другим речима, израз (2.32) множен са 4-дејством $(m\dot{s})$ даће израз (2.25), претходну форму дејства, односно информације перцепције. То је основа за третирање 4-интервала као дејства, односно као информације перцепције.

Посматрамо ли дужине и трајања инфинитезималне околине дате тачке простор-времена Минковског, имамо инфинитезималан 4-интервал

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2, \tag{2.33}$$

где горњи индекси представљају квадрирања диференцијала. Овакве инфинитезималне 4-интервале називамо и *метрикама*. Исти интервал у сферним координатама

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \\ \theta = \arccos\frac{z}{r}. \end{cases} \tag{2.34}$$

[11] Закону одржања информације посвећена је моја претходна књига „Физичка информација“ [2].

постаје

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2\, d\theta^2 - c^2 dt^2. \tag{2.35}$$

Даље, у централно симетричном гравитационом пољу овај израз добија облик

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2\, d\theta^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2, \tag{2.36}$$

где је $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2 гравитациона константа, M маса тела које производи гравитацију, а r удаљеност посматране тачке од центра гравитације. Ово је познато *Шварцшилдово решење* Ајнштајнових једначина. Такође, ово ds^2 представљамо као дејство, па према томе и као информацију перцепције.

У присуству јаких маса (великог M), за разлику од *Њутнове*[12] гравитације, Ајнштајнова која се може извести из метрике (2.36), поред тога што привлачи дато тело ка центру, стишће га бочно. Човек који би стајао у соби у веома јаком гравитационом пољу осећао би различиту силу на висини главе и ногу. То би створило ефекат истезања, стањивања и кидања тела које пропада. Зато се чини да је из Лоренцовог интервала (2.35) немогуће добити Шварцшилдов (2.36), или обрнуто, али да то није тачно тврди следећа теорема.

Подразумевамо сферни систем координата $Or\varphi\theta$ са центром гравитације у исходишту и посматрамо централно симетрично поље, па ће евентуална два таква система имати исте углове φ и θ.

Теорема 2.3.4. *Дате су трансформације диференцијала*

$$\begin{cases} dr = \chi\, dr' + i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\, cdt' \\ cdt = i\gamma\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\, dr' + \gamma^2\chi\, cdt', \end{cases} \tag{2.37}$$

где је i имагинарна јединица, $\gamma = (1 - 2GM/rc^2)^{-1/2}$, а $\chi \in \mathbb{C}$ произвољан параметар. Показати да су то опште трансформације које метрику гравитације (2.36) преводе у инерцијалну метрику (2.35).

Доказ. Игноришемо координате које не утичу на резултат ($d\varphi = d\varphi'$ и $d\theta = d\theta'$) и полазимо од система:

$$\begin{cases} dr = \alpha_{rr}\, dr' + \alpha_{rt}\, cdt' \\ cdt = \alpha_{tr}\, dr' + \alpha_{tt}\, cdt', \end{cases} \tag{2.38}$$

где α_{mn} зависе само од r. Сменом у скраћени израз (2.36) добијамо:

$$ds^2 = \gamma^2\, dr^2 - \gamma^{-2}\, c^2 dt^2 =$$

$$= \gamma^2(\alpha_{rr}\, dr' + \alpha_{rt}\, cdt')^2 - \gamma^{-2}(\alpha_{tr}\, dr' + \alpha_{tt}\, cdt')^2$$

$$= (\gamma^2\alpha_{rr}^2 - \gamma^{-2}\alpha_{tr}^2)\, dr'^2 + 2(\gamma^2\alpha_{rr}\alpha_{rt} - \gamma^{-2}\alpha_{tr}\alpha_{tt})\, dr'\, cdt' + (\gamma^2\alpha_{rt}^2 - \gamma^{-2}\alpha_{tt}^2)\, c^2 dt'^2.$$

Изједначавајући овај интервал са $dr'^2 - c^2 dt'^2$ добијамо систем једначина:

$$\begin{cases} \gamma^2\alpha_{rr}^2 - \gamma^{-2}\alpha_{tr}^2 = 1, \\ \gamma^2\alpha_{rr}\alpha_{rt} - \gamma^{-2}\alpha_{tr}\alpha_{tt} = 0, \\ \gamma^2\alpha_{rt}^2 - \gamma^{-2}\alpha_{tt}^2 = -1. \end{cases}$$

[12] Isaac Newton (1642-1727), енглески математичар.

То су три једначине са четири непознате алфе што значи да имамо произвољан параметар; нека је то $\alpha_{rr} = \chi \in \mathbb{C}$. Из прве једначине следи $\alpha_{tr} = \pm i\gamma\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}$. Из треће једначине добијамо $\alpha_{rt} = \pm i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^{-2}\alpha_{tt}^2}$, што уврштено у средњу даје, редом:

$$\gamma^2\chi(\pm i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^{-2}\alpha_{tt}^2}) - \gamma^{-2}(\pm i\gamma\sqrt{1-\gamma^2\chi^2})\alpha_{tt} = 0,$$

$$\gamma\chi\sqrt{1-\gamma^{-2}\alpha_{tt}^2} = \gamma^{-1}\alpha_{tt}\sqrt{1-\gamma^2\chi^2},$$

$$\chi^2(\gamma^2 - \alpha_{tt}^2) = \alpha_{tt}^2(\gamma^{-2} - \chi^2),$$

$$\chi^2\gamma^2 = \alpha_{tt}^2\gamma^{-2},$$

одакле следи $\alpha_{tt} = \pm\gamma^2\chi$ и $\alpha_{rt} = \pm i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}$. Када узмемо само горње предзнаке, добијамо тражени систем. □

Овде је то много важнији резултат него у време када сам га први пут објављивао, или затим у књизи [8], јер сада потврђује дводимензионалност информације перцепције, иначе на први поглед веома спорну.

Када боље погледамо трансформације (2.37) видимо да множењем прве са γ а друге са $i\gamma^{-1}$ добијамо:

$$\begin{cases} \gamma\, dr = \gamma\chi\, dr' + \sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\, icdt' \\ \gamma^{-1}\, icdt = -\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\, dr' + \gamma\chi\, icdt'. \end{cases} \tag{2.39}$$

Сменом $dy_1 = \gamma dr$, $dy_4 = \gamma^{-1}icdt$ и $dx_1 = dr'$, $dx_4 = icdt$, затим:

$$\cos\varphi = \gamma\chi, \quad \sin\varphi = \sqrt{1-\gamma^2\chi^2}. \tag{2.40}$$

оне постају обичне ротације, јер је

$$\begin{cases} dy_1 = \cos\varphi\, dx_1 + \sin\varphi\, dx_4, \\ dy_4 = -\sin\varphi\, dx_1 + \cos\varphi\, dx_4. \end{cases} \tag{2.41}$$

Сменом $dy_0 = \gamma^{-1}cdt$, $dx_0 = cdt$ и $\varphi = i\phi$ добијамо

$$\begin{cases} dy_1 = \operatorname{ch}\phi\, dx_1 + \operatorname{sh}\phi\, dx_0, \\ dy_0 = \operatorname{sh}\phi\, dx_1 + \operatorname{ch}\phi\, dx_0, \end{cases} \tag{2.42}$$

а то су хиперболне ротације, односно Лоренцове трансформације. Свакако је

$$ds^2 = (\gamma dr)^2 - (\gamma^{-1}cdt)^2 = (dr')^2 - (cdt')^2, \tag{2.43}$$

где је $\gamma = 1/\sqrt{1-2GM/rc^2}$ узето из (2.36).

Да би хиперболне трансформације са (2.40) биле „реалне“ (еквивалент Лоренцовим) довољно је $|\gamma\chi| \leq 1$. Тада из (2.42) и $\beta = i\operatorname{th}\phi$ добијамо

$$\gamma\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \tag{2.44}$$

што открива природу другог коефицијента (χ). То је број без димензија који одређује почетну брзину тела у слободном паду у гравитационом пољу. Другачије речено, број χ дефинише висину са које је дато тело почело падати.

На пример, у случају нулте почетне брзине у бесконачности ($v \to 0$ када $r \to \infty$), из $ma = F_g$ израчунавамо $v^2 = 2GM/r$, а отуда $\gamma\chi = 1$. Трансформације (2.37) постају $\gamma\, dr = dr'$ и $\gamma^{-1} cdt = cdt'$ што значи да сопствене вредности $dr_0 = dr'$ и $dt_0 = dt'$ тачака у мировању дају:

$$dr = dr_0\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}, \quad dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}} \tag{2.45}$$

релативно у односу на падајуће тело. А тај резултат је познат.

Када у једном тренутку видимо чашу на столу, то значи да је у том тренутку тај њен положај највероватнији. Она ће се појавити на истом месту и у следећем тренутку и у следећем, све док на њу не делује нека сила. Руком можемо померити чашу са стола, што значи да рука, дакле сила, мења вероватноће. Промена вероватноћа значи промену стања неизвесности, еквивалентно промени неизвесности због генерисања информације из ње. Због закона одржања информације и настајања информације из неизвесности, неизвесност морамо сматрати врстом информације, а поред тога, емисију информације чином промене неизвесности. Зато то двоје, силу и информацију, треба сматрати сродним физичким величинама.

2.4 Ојлер-Лагранжове једначине

Информација перцепције (2.2) јесте збир „слобода“ (количина опција), а сваки тај сабирак је производ одговарајуће „способности“ субјекта и објективних „тешкоћа“. Како је „слобода“ нека информација то је њен експонент нека количина опција, а реципрочна вредност тог експонента нека средња вредност вероватноћа исхода тих опција. Знамо да се чешће реализују вероватнији догађији, па онда знамо да природни процеси спонтано теку ка мањој емисији информације, што значи да се природа настоји развијати у стања са што је могуће мање „слободе“. То је *принцип минимализма.*

Како је информација перцепције формално збир производа одговарајућих парова дате две n-торке, два низа са по $n \in \mathbb{N}$ чланова, то је она и скаларни производ вектора. Компоненте та два вектора су обзервабле (прве мере интелигенцију јединке, друге хијерархију средине), а оне се увек могу свести у једну раван са само две „обзервабле“. Кажем две наводне обзервабле, јер остављамо по страни питања физичке мерљивости вредности сведених компоненти.

Кандитата за такву информацију перцепције даће *лагранжијан*[13], разлика кинетичке и потенцијалне енергије, иначе веома позната теоријској физици. У Њутновој механици, лагранжијан дефинишемо са

$$\mathcal{L} = E_k - E_p, \tag{2.46}$$

где је E_k укупна кинетичка енергија посматраног система (тела), а E_p је његова укупна потенцијална енергија. Као што знамо, производ енергије и времена је физичко *дејство* које ћемо овде означавати са $\mathcal{S}$.

Пример 2.4.1 (Опруга)**.** *Дефинисати лагранжијан еластичне опруге.*

Решење. Узмимо једноставан случај масе m на крају опруге дуж x-осе. Кинетичка и потенцијална енергија опруге су:

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \quad E_p = \frac{kx^2}{2},$$

[13] в. [16].

па је лагранжијан опруге:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \tag{2.47}$$

Извод дужине по времену је брзина $v = \dot{x}$, □

За парцијалне изводе лагранжијана (2.47) по брзини и путу налазимо:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx.$$

Према Њутновом закону сила је пропорционална маси и убрзању, овде

$$m\ddot{x} = -kx,$$

а отуда још општије једначине кретања

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}. \tag{2.48}$$

Ово су познате *Ојлер-Лагранжове једначине.* Оне изражавају услов да лагранжијан $\mathcal{L}$ буде такав да његов интеграл током времена, дејство $\mathcal{S}$, постане максималан или минималан.

Много је познатих начина извођења једначина (2.48), али због комплетирања текста треба навести бар један. Неки су математички коректнији, други су општији, трећи популарнији, а следећи[14] је за ову књигу можда најприкладнији.

Теорема 2.4.2 (Ојлер-Лагранжове једначине)**.** *Доказати да једначину*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \tag{2.49}$$

где је $q = q(t)$ координата променљива временом t, $\dot{q}$ њен извод по времену, функција $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ је лагранжијан а њен интеграл током времена, дејство $\mathcal{S}$, је максималан или минималан.

Доказ. Мењамо координату $q(t)$ малом варијацијом $\eta(t)$, до инфинитезималне, са граничним условима $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Услов екстрема је:

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{S} = \frac{d}{d\epsilon}\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q(t) + \epsilon\eta(t), \dot{q}(t) + \epsilon\dot{\eta}(t), t\right)\, dt = 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\eta\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \dot{\eta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) dt = 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \eta\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\, dt + \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\, d\eta\right) = 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \eta\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\, dt + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\eta(t)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\eta\, dt\right) = 0,$$

[14] Euler-Lagrange-Equation: `https://martin-ueding.de/`

$$\int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \eta\, dt = 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \eta(t)\, dt = 0.$$

Ово важи за свако $\eta(t)$, па је израз у загради нула, а то је једначина (2.49). □

Доследно претходним разматрањима даље настављамо са принципом минимализма у кретању небеских тела у гравитацији. Шварцшилдова (2.36), или нека друга метрика Ајнштајнових једначина може се подвести под општи израз

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.50}$$

где је $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ два пута коваријантан метрички тензор, dx^μ су диференцијали контраваријантних координата, при чему се сходно Ајнштајновој конвенцији о сабирању тензора врши сабирање по поновљеном доњем и горњем индексу. Интервал ds је најкраћи пут између датих тачака у 4-дим простор-времену теорије релативности.

Интеграл тог најкраћег пута је дејство

$$\mathcal{S} = \lambda \int_a^b ds, \tag{2.51}$$

где је λ за сада непозната константа. Лагранжијан у датој тачки је

$$\mathcal{L} = \lambda \dot{\mathcal{S}}, \tag{2.52}$$

где тачка изнад интервала значи извод по времену, често сопственом времену система дате тачке.

Пример 2.4.3 (Лоренцов лагранжијан)**.** *Наћи лагранжијан метрике (2.33).*

Решење. Лоренцов интервал

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

важи у одсуству гравитације и у Декартовим правоуглим координатама. Према (2.50) тада је $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ и $x^4 = ict$, док је $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{44} = -1$, а сви остали коефицијенти метричког тензора су нуле. Просторна дужина је

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

па се 4-интервал своди на

$$ds^2 = dl^2 - c^2 dt^2 = -\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 dt^2,$$

где је $v = dl/dt$ брзина кретања датог тела (материјалне тачке). За мале брзине v, због $c \to \infty$, лагранжијан мора прећи у класични $\mathcal{L} = mv^2/2$, па је

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -mc^2 + \frac{mv^2}{2} = E_k - E_p,$$

што значи да је $\lambda = imc$. □

У општем случају гравитационог поља, лагранжијан је

$$\mathcal{L} = imc\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}. \tag{2.53}$$

То је реалан негативан број јер је израз под кореном увек негативан ($i^2 = -1$). Ово друго значи да је потенцијална енергија тела (честице) у гравитационом пољу увек већа од њене кинетичке енергије. Када би претходни пример радили у општем случају, у слабијим пољима које називамо Њутновим, упоредили бисмо (2.53) са познатим нерелативистичким лагранжијаном ($\mathcal{L} = E_k - E_p$), дакле са

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} - m\phi, \tag{2.54}$$

где је ϕ извесна функција координата и времена која карактерише поље и назива се *гравитациони потенцијал*, m је маса честице, v њена брзина. Одговарајуће једначине кретања су

$$\dot{\mathbf{v}} = -\text{grad}\ \phi. \tag{2.55}$$

Није потребна маса или нека друга особина честице за дефинисање њеног убрзања у гравитационом пољу.

Сада ћемо извести опште диференцијалне једначине кретања држећи се принципа најмањег дејства. Добићемо једначине познате у класичној физици, али обратите пажњу на необичан начин овог извођења јер је оно засновано на релативистичком лагранжијану (2.53). *Кристофелови*[15] симболе за краће записивање тих једначина, које ћемо наћи успут, наравно, тачно су једнаки онима нама иначе познатим из *Риманове*[16] геометрије и Ајнштајнове гравитације.

Метрички коефицијенти $g_{\mu\nu}$ зависе од места дате честице, али не и од њене брзине. Другим речима, они се могу мењати са x^α, али не и са dx^α/dt. Тако, диференцирање $\mathcal{L}$ по $\dot{x}^\sigma = dx^\sigma/dt$ даје:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\sigma} &= wg_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\dot{x}^\sigma}\left(\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\right) = \\
&= wg_{\mu\nu}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\dot{x}^\sigma}\frac{dx^\mu}{dt}\right)\frac{dx^\nu}{dt} + \frac{dx^\mu}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{x}^\sigma}\frac{dx^\nu}{dt}\right)\right] \\
&= wg_{\mu\nu}\left(\delta^\mu_\sigma\frac{dx^\nu}{dt} + \frac{dx^\mu}{dt}\delta^\nu_\sigma\right), \quad \dot{x}^\sigma = \frac{dx^\sigma}{dt} \\
&= w\left(g_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{dt} + g_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{dt}\right) \\
&= w\cdot 2g_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{dt}.
\end{aligned}$$

где

$$w = \frac{imc}{2\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}} = \frac{imc}{2\frac{ds}{dt}} = \frac{imc}{2}\frac{dt}{ds}.$$

Отуда:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\sigma} = \frac{imc\,g_{\mu\sigma}}{\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}}\frac{dx^\mu}{dt} = imc\,g_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{ds}. \tag{2.56}$$

[15] Elwin Christoffel (1829-1900), немачки математичар.
[16] Bernhard Riemann (1826-1866), немачки математичар.

Обична деривација по t је:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = imc\frac{d}{dt}\left(g_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{ds}\right)$$

$$= imc\left(\frac{dg_{\mu\sigma}}{dt}\frac{dx^\mu}{ds} + g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^\mu}{dsdt}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = imc\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\mu}{ds} + g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^\mu}{dsdt}\right). \tag{2.57}$$

Зато што само $g_{\mu\nu}$ експлицитно зависи од x^σ, имамо следеће:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\sigma} = w\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = \frac{imc}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{ds}. \tag{2.58}$$

Па можемо комплетирати Ојлер-Лагранжове једначине и трансформисати их:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\sigma} = 0,$$

$$imc\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\mu}{ds} + g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^\mu}{dsdt}\right) - \frac{imc}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{ds} = 0,$$

$$g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^\mu}{dsdt} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\mu}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{ds} = 0,$$

$$g_{\mu\sigma}d^2x^\mu + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\alpha}dx^\alpha dx^\mu - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}dx^\mu dx^\nu = 0. \tag{2.59}$$

Ово су опште једначине кретања простора произвољне метрике.

Исте једначине се могу изразити и помоћу *Кристофелових симбола.* Кристофелови симболи се дефинишу у односу на базне векторе датог координатног система:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\mathbf{e}_\sigma. \tag{2.60}$$

Није очигледно, али гледајући други коваријантни извод скалара, може се доказати:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}. \tag{2.61}$$

Кристофелови симболи су симетрични на замену места доња два индекса.

Као што знамо, базни вектори $\mathbf{e}_\sigma$ се дефинишу тако да

$$ds^2 = d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{s} = (dx^\mu\mathbf{e}_\mu)\cdot(dx^\nu\mathbf{e}_\nu) =$$

$$= \mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu\, dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu.$$

У локалном равном оквиру са Декартовим правоуглим координатама, сви базни вектори $\mathbf{e}_\sigma$ су константе, па сви Кристофелови симболи морају бити нуле.

Зато у произвољној метрици имамо:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial(\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\alpha}\cdot\mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\mu\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\alpha}$$

$$= \Gamma^\sigma_{\alpha\mu}\mathbf{e}_\sigma\cdot\mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\mu\cdot\Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\mathbf{e}_\sigma.$$

Парцијални изводи метричког тензора нису тензори, па Кристофелови симболи нису тензори.

Опште једначине кретања сада постају:

$$g_{\mu\sigma}d^2x^\mu + \Gamma^\beta_{\alpha\mu}g_{\beta\sigma}dx^\alpha dx^\mu + \Gamma^\beta_{\alpha\mu}g_{\mu\beta}dx^\alpha dx^\mu - \frac{1}{2}\Gamma^\beta_{\sigma\mu}g_{\beta\nu}dx^\mu dx^\nu - \frac{1}{2}\Gamma^\beta_{\sigma\nu}g_{\mu\beta}dx^\mu dx^\nu = 0.$$

У другом и трећем члану мењамо сабирање по α са ν. Тада добијамо:

$$2g_{\mu\sigma}d^2x^\mu + (2\Gamma^\beta_{\nu\mu}g_{\beta\sigma} + 2\Gamma^\beta_{\nu\sigma}g_{\mu\beta} - \Gamma^\beta_{\sigma\mu}g_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\sigma\nu}g_{\mu\beta})dx^\mu dx^\nu = 0.$$

Због поменуте симетрије и након скраћивања добијамо:

$$g_{\mu\sigma}d^2x^\mu + \Gamma^\beta_{\mu\nu}g_{\beta\sigma}dx^\mu dx^\nu = 0. \tag{2.62}$$

Те једначине кретања се могу поједноставити множењем контраваријантним метричким тензором:

$$g^{\sigma\alpha}g_{\mu\sigma}d^2x^\mu + g^{\sigma\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu}g_{\beta\sigma}dx^\mu dx^\nu = 0,$$

$$\delta^\alpha_\mu d^2x^\mu + \delta^\alpha_\beta\Gamma^\beta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0,$$

$$d^2x^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0. \tag{2.63}$$

Ово су тражене опште једначине кретања изражене помоћу Кристофелових симбола друге врсте.

2.5 Ајнштајнове опште једначине

Видели смо да се класични лагранжијан надовезује на релативистичку метрику и да даје потпуно исте геодезијске линије које су нам познате из Риманове геометрије. То су криве линије које прате најкраћа растојања у нееуклидским геометријама, а које су у Ајнштајновим гравитационим пољима догађаји (тачке 4-дим простор-времена) „слободног падања“ сателита у бестежинским стањима. Сада су то путање најмање потрошње енергије и уједно најмање потрошње информације.

Због доследности, у наставку ћемо доказати да се из истог *начела минимализма*, на којем се заснива употреба лагранжијана, могу извести и чувене Ајнштајнове *опште једначине* у потпуно истом облику како их је он открио разматрајући инерцијална кретања и утицај материје, односно енергије на простор-време. У свим овим и сличним разматрањима израз „принцип најмањег дејства“ увек је могуће заменити изразом „принцип најмање информације“ и обрнуто.

Као што је познато, Ајнштајн је своје опште једначине поља

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{2.64}$$

формирао 1916. године „непосредно“, примећујући да лева страна једнакости треба да представља геометрију простора (одређену тензорима кривине и метрике), а десна страна материју (одређену тензором енергије). Тек много касније оне су (у тачно истом облику) добијане и помоћу принципа најмањег дејства.

У књизи „Простор-време“ објаснио сам Ајнштајнов метод, навео једно нерелативистичко извођење метрике централно-симетричног гравитационог поља[17] и показао на велики степен приближности тог са Шварцшилдовим решењем. Овде сам поновио део једног мог још старијег прилога [16] у којем се из Ојлер-Лагранжових једначина (на нерелативистички начин) изводе Кристофелови симболи и опште једначине кретања, па је сада потребно довршити ову расправу демонстрирајући конзистентност ове методе у општој теорији релативности. На сајту посвећеном Ајнштајну[18] можете наћи још таквих занимљивих доказа.

У одсуству материје и енергије (у вакууму) уобичајено нагађамо дејство облика

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}\, d^4V, \tag{2.65}$$

где је сада узет интеграл лагранжијана $\mathcal{L}$, скалара густине промене енергије, по d^4V елементу инфинитезималне 4-запремине. У локалним координатама $x^{\mu'}$ 4-димензионалног простор-времена Минковском, попут елемента запремине је

$$d^4V = dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'}dx^{4'} = (\det J^{\mu'}_{\nu})dx^1dx^2dx^3dx^4 = (\det J^{\mu'}_{\nu})d^4x,$$

где је $\det J^{\mu'}_{\nu}$ Јакобијан дате трансформације координата. Показује се да за метрички тензор у уопштем случају важе трансформације координата

$$g_{\mu\nu} = J^{\alpha'}_{\mu} J^{\beta'}_{\nu} g_{\alpha'\beta'}, \tag{2.66}$$

па ако је g детерминанта матрице метричког тензора, типа 4×4, тада је $g = -(\det J)^2$ и према томе $\det J = \sqrt{-g}$. Елеменат 4-запремине је

$$dV = \sqrt{-g}\, d^4x. \tag{2.67}$$

Као што знамо (Бјанкијев идентитет, [17]), најједноставнији лагранжијан $\mathcal{L}$ који је скаларна функција метрике $g_{\mu\nu}$ а чија деривација је Ричијев скалар R (који се изводи из Римановог тензора $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$, в. [9]) је управо тај скалар, $\mathcal{L} = R$.

Отуда Ајнштајн-Хилбертово дејство

$$S = \int_V \mathcal{L}\sqrt{-g}\, d^4x = \int_V R\sqrt{-g}\, d^4x. \tag{2.68}$$

Оно се може добити и у облику

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}\, d^4x, \tag{2.69}$$

који укључује јединице мере са $G = 6,67408\times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} универзалном гравитационом константом и космолошком константом Λ. Оба облика се преводе у дати.

Следеће је добијање Ајнштајнове једначине (2.64) из дејства (2.69). Као и уобичајено, да би варирали дејство тако да је $\delta S = 0$, налазимо:

$$\delta S = \delta\int R\sqrt{-g}\, d^4x = \delta\int g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x = \int \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g})\, d^4x =$$

[17] [8], (1.126) str. 59. и даље.

[18] Einstein Relatively Easy: `http://einsteinrelativelyeasy.com/`

$$= \int (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g})\, d^4x$$

$$= \int (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + R\delta\sqrt{-g})\, d^4x.$$

Ово наводим више ради потврде методе и обуке, него ради сумње у резултат. Знајући да је

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},$$

налазимо:

$$\delta S = \int (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} R + \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\sqrt{-g})\, d^4x$$

$$= \int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x + \int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x.$$

Стављајући $\delta S = 0$ и знајући да је $\delta g^{\mu\nu}$ потпуно произвољно, добијамо Ајнштајнову једначину у вакууму

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0, \tag{2.70}$$

ако и само ако можемо утврдити да други члан отпада, тј. да је

$$\int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x = 0. \tag{2.71}$$

За тај део доказа полазимо од Римановог тензора кривине $R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu}$, који одговара разлици паралелног преноса вектора у два супротна смера затворене путање. Друга интерпретација Римановог тензора је релативно убрзање суседних честица у слободном паду.

Нећемо изводити овај тензор

$$R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\sigma} \tag{2.72}$$

или проверавати последње две иначе познате тврдње, него одмах прелазимо на наставак нашег доказа. Контракцијом овог тензора по првом и трећем индексу (стављајући $\sigma = \alpha$ и сабирањем по овом индексу), добијамо Ричијев тензор

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}. \tag{2.73}$$

Варирајући добијамо

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}. \tag{2.74}$$

Прва два сабирка нам сугеришу да би могло бити разлике између две коваријантне деривације.

Коваријантне деривације тензора вишег реда, као што знамо, добијају се узимањем парцијалне деривације тензора, затим додавањем Кристофеловог симбола $\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ сваком горњем индексу и одузмањем симбола $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ сваком доњем индексу. Тако, на пример, имамо коваријантну деривацију

$$\Delta_\beta T^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial T^{\mu}_{\nu}}{\partial x^\beta} + T^{\alpha}_{\nu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - T^{\mu}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}, \tag{2.75}$$

тензора другог реда T^{μ}_{ν}. Када су оба индекса овог тензора (два пута коваријантан) доњи, онда (прво) сабирање прелази у одузимање, а ако су оба индекса горњи (контраваријантан) имамо два сабирања. При томе се индекси усклађују тако да су по један горњи и доњи (у производима) једнаки ради примене конвенције о сабирању тензора.

Применом коваријантне деривације добијамо израз

$$\Delta_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \Delta_\nu(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}) = \delta R_{\mu\nu}, \tag{2.76}$$

која се назива Палатинијева једнакост. Ову смењујемо у леву страну једнакости (2.71) и након сређивања налазимо

$$\int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x = \int \Delta_\alpha(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu})\sqrt{-g}\,d^4x. \tag{2.77}$$

У изразу у загради десно индекси μ и ν се поништавају, тако да је он тензор првог реда

$$A^\alpha = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}, \tag{2.78}$$

па нам остаје

$$\int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x = \int_V \Delta_\alpha A^\alpha\sqrt{-g}\,d^4x, \tag{2.79}$$

што се може свести на интеграл површине из теореме дивергенције[19], који ишчезава јер се претпоставља да варијације ишчезавају на површини V. Тако коначно добијамо Ајнштајнову једначину (2.70) за вакуум.

Да би доказали општу једначину (2.64), за простор који није празан него садржи материју, на Ајнштајн-Хилбертово дејство S_{AH} треба додати дејство S_M, па је укупно дејство

$$S = kS_{AH} + S_M. \tag{2.80}$$

Сада је, редом:

$$\delta S_{AH} = \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x = \int \frac{\delta S_{AH}}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}\,d^4x,$$

$$\frac{\delta S_{AH}}{\delta g^{\mu\nu}} = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\sqrt{-g},$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{AH}}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R,$$

па варирање укупног дејства даје:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{k\delta S_{AH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = k\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0.$$

Сређивањем добијамо:

$$k\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}},$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{1}{k\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

[19] Divergence theorem: `https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem`

Дефинишући тензор енергије-импулса са

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.81}$$

и стављајући $k = c^4/2(8\pi G)$ добијамо тражене Ајнштајнове једначине (2.64).

Ајнштајн своје једначине није изводио из принципа најмањег дејства, али из једнаких резултата сада видимо да је гравитационо поље простор дејства, па је онда то и простор размена физичких информација, односно простор комуникација. Геодезијске линије, по чијим кретањима смо сада доказали да важи принцип најмањег дејства физике, за Ајнштајна биле су трајекторије слободног пада. Обједињујући то двоје у теорију (физичке) информације, сада можемо утврдити да је емисија информација на сопственој путањи најмања, те да је сопствена вероватноћа свог пута, како га види тело које слободно пада, највећа.

Приметимо да се то слаже са претходним запажањем (Максвелов демон) да термодинамички кружни процес када губи енергију постаје неповратан, губи информацију и расте му ентропија. У односу на тело у слободном паду ентропија ваздуха у соби на земљи мања је, јер молекуле гаса ближе поду распоређују се гушће. Неко (неједнако) релативно смањење ентропије постоји за „собе“ са обе стране путање, доње и горње. Зато што је ентропија тог ваздуха релативно мања, емисија информације према вани је релативно већа, па због принципа минимализма информације тело остаје у свом слободном паду и не прелази спонтано на таква друга стања.

Други пример сагласности је Комптонов ефекат. Зато што се сударом и променом путање таласна дужина фотона повећава, повећава му се „размазаност“ на тој новој путањи, смањује се густина вероватноће, па кажемо да фотон није хтео спонтано скренути на путању мање вероватноће (са сопственог становишта), односно скренути у стања већих емисија информације. Доследно томе, зато што природа шкртари са информацијом зато имамо закон инерције.

2.6 Шредингерова једначина

Вратимо се опет на информацију перцепције (2.3) и посматрајмо један њен сабирак L_k који називамо „слободом“. Сваки тај сабирак је информација о некој таласној појави и, са друге стране, логаритам неке вероватноће. Ту вероватноћу смо затим написали у облику $P_k = \exp(L_k)$, бирајући за базу Ојлеров број ($e \approx 2,718$), чиме смо се само одлучили за јединицу ифнормације. Да бисмо укључили и таласне појаве, мораћемо информацију представљати помоћу комплексног броја, а ево зашто.

Периодичне појаве у основи изражавамо синусоидама[20]

$$y = A \cdot \sin(\omega t - \delta). \tag{2.82}$$

Од ових добијамо косинусоиде, рецимо из:

$$\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta), \quad \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}, \tag{2.83}$$

и сличних формула, а даље добијамо и остале тригонометријске и таласне функције. Фуријеов развој[21] функција у ред синуса и косинуса поопштава ту идеју.

[20] Користићу [12] због веће убедљивости.

[21] Fourier series: `https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series`

Подразумева се да знамо неке математичке основе попут

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \\ e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2), \end{cases} \tag{2.84}$$

где је $i^2 = -1$, као и хипотезу Луја де Броја[22] из 1924. године да се свакој покретној честици може придружити *талас*, која је увелико потврђена и прихваћена у физици.

Формалну синусну функцију (2.82) преписујемо у облик

$$y = A\sin\frac{2\pi\nu}{\lambda}\left(t - \frac{x}{v}\right), \tag{2.85}$$

који је више физикалан. Таласна функција придружена честици која се креће дуж x-осе дата је са

$$\psi = Ae^{-i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)}, \tag{2.86}$$

где је A амплитуда осцилација, ν је фреквенција таласа, $\omega = 2\pi\nu$ је угаона фреквенција, λ је таласна дужина, x и t су место и тренутак, а $v = \nu\lambda$ је брзина таласа.

Укупна енергија осцилација је

$$E = h\nu = 2\pi\hbar\nu, \tag{2.87}$$

где је h Планкова константа и $\hbar = h/2\pi$, па је $\nu = E/2\pi\hbar$. Према Луј де Бројевој хипотези $\lambda = h/p = 2\pi\hbar/p$ где је p импулс честице, па (2.86) постаје

$$\psi = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-xp)}. \tag{2.88}$$

Ово је математичка репрезентација слободне честице укупне енергије E импулса p која се креће у правцу x-осе.

Укупна енергија је збир кинетичке и потенцијалне ($E = E_k + E_p$), односно:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{m^2v^2}{2m} + E_p = \frac{p^2}{2m} + E_p, \tag{2.89}$$

па је

$$E\psi = \frac{p^2}{2m}\psi + E_p\psi. \tag{2.90}$$

Парцијалним диференцирањем (2.88) по x добијамо

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-xp)}\frac{ip}{\hbar}, \tag{2.91}$$

а поновним диференцирањем по x

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-xp)}. \tag{2.92}$$

Користећи (2.88) овај резултат пишемо

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2\psi}{\hbar^2}, \tag{2.93}$$

[22] Louis de Broglie (1892-1987), француски физичар.

односно

$$p^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \tag{2.94}$$

Диференцирањем (2.88) по t добијамо

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-xp)}\frac{-iE}{\hbar}. \tag{2.95}$$

Поновна употреба (2.88) даје

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-iE}{\hbar}\psi, \tag{2.96}$$

односно

$$E\psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{2.97}$$

Једначина (2.90) постаје

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + E_p\psi. \tag{2.98}$$

Сменом (2.94) и (2.97) у (2.90) добијамо

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - E_p\psi. \tag{2.99}$$

Добили смо једно-димензионалну, временски зависну *Шредингерову једначину.*

Иста може бити писана у три димензије као

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - E_p\psi, \tag{2.100}$$

где је

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.101}$$

Лапласов[23] оператор.

То је то, отприлике најпиткије што се може пронаћи од свих до данас понуђених доказа чувене Шредингерове једначине, која је први пут излагана 1926. године, прво много опширније и много компликованије. Предност овог прилога је и у јаснијој вези таласне функције ψ са информацијом перцепције, надам се.

2.6.1 Опште о решењима

Добили смо временски зависну Шредингерову једначину (2.100) која се често пише и у следећем облику

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r},t)\right]\Psi(\mathbf{r},t), \tag{2.102}$$

где је $\Psi(\mathbf{r},t)$ таласна функција одређена вектором положаја $\mathbf{r}$ у тренутку t. Приметимо, када су $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ решења ове диференцијалне једначине, онда је и

$$\Psi = \alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2 + \ldots \tag{2.103}$$

[23] Pierre-Simon Laplace (1749-1827), француски математичар.

решење, где су $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \in \mathbb{C}$ произвољне константе, а сабирака има природан број или бесконачно. Лако је даље показати[24] да оваква решења чине *векторски простор*, посебно Хилбертов векторски простор.

Као што знамо, *матрице* истог типа такође чине векторске просторе. Матрице-колоне (или матрице-врсте) еквивалентне су низовима, а ове можемо интерпретирати класичним радијус-векторима положаја тачке, па и оријентисаним дужима. Линеарни оператори низова су матрице са онолико колона (врста) колико низ има компоненти. Оне делују на своје векторе множењем сдесна (слева) формирајући нове векторе, копије оригинала.

Због особина извода, $(cf)' = cf'$, када је матрица константна, када су сви њени коефицијенти константе, а она делује на вектор који је решење Шредингерове једначине, онда је и резултат решење те једначине. Уопште, константан линеарни *оператор* ће свако решење Шредингерове једначине пресликати у неко решење исте једначине, просто зато што је та једначина линеарна.

Значења ових простих алгебарских својстава за квантну механику су непроцењива. *Обзервабле*, мерљиве величине које желимо да посматрамо, репрезентују координатне осе, квантна стања која су због дискретности информације на крају увек неке честице представљена су векторима, а *квантне еволуције* операторима. Вектори су нормирани (јединични), јер представљају *суперпозиције*, они дефинишу расподеле вероватноћа појаве квантног стања по датим обзерваблама, а оператори су унитарни, што значи линеарни и инвертибилни.

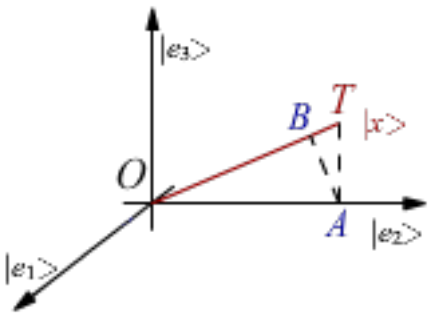
2.7 Борнов закон

Физичке величине које се пишу различитим димензијама физичких мерних јединица (метар, килограм, секунда) представљају бројне осе узајамно окомитих координата, односно базу векторског простора квантног система. Он је репрезентација векторског простора. Обзервабле датог *квантног система* разапињу *векторски простор*. Поједини вектори таквог простора су *квантна стања*, а њихово *мерење* пројекција вектора на осе. Деловање унитарног оператора на вектор постаје еволуција квантног стања.

Квантни систем је материјална интерпретација апстрактног Хилбертовог векторског простора и, према томе, он има неке своје посебности. На пример, у складу са начелом коначности материје је „атомизирање“ сваког, али баш сваког, својства материје, па је квантно стање увек неки скуп честица, сваке са највише коначно много материјалних особина. Из истог следи и ограничена предвидљивост физичког понашања честица, односно принципијелна неизбежност *случајности*, а затим и потреба за вероватноћама. Доследно, компоненте вектора стања су неке функције вероватноћа.

Ово је на други начин примећено већ 1926. године када је формулисан *Борнов закон*[25] за вероватноћу мерења (в. [26]). У свом најједноставнијем облику тај закон каже да је густина вероватноће налажења честице на датом месту пропорционална квадрату амплитуде честичне таласне функције на том месту. Варадараџан[26] је један од првих и најпознатији који се успешно бавио објашњењем зашто је та вероватноћа једнака баш квадрату амплитуде а не некој другој функцији, али уместо његовог ми следимо овде доследна, мало другачија (в. [7]) и једноставнија објашњења.

[24] Дефиницију векторског простора имате у „Квантној механици“ [4].
[25] Max Born (1882-1970), немачки математичар и теоријски физичар.
[26] Veeravalli S. Varadarajan, рођ. маја 1937, индијски математичар.



Slika 2.3: Борнова вероватноћа.

Посматрајмо вектор $|x\rangle$ представљен са дужи OT на слици 2.3. Ортогонална пројекција тачке T на осу $|e_2\rangle$ је тачка A. *Дираковом нотацијом* и упоредо мерењем обзервабле на слици пишемо

$$\overrightarrow{OA} = |e_2\rangle\langle e_2|x\rangle. \tag{2.104}$$

Вектори који представљају различита физичка својства нису колинеарни (они су ортогонални) и њихов збир није једнак скаларном збиру интензитета делова. Зато количник бројева $\langle e_2|x\rangle$ и $|x\rangle$ не може представљати вероватноћу. Да бисмо добили учешће појединих координата у укупној вероватноћи, израчунајмо допринос сваке компоненте вектора дуж правца $|x\rangle$. Добијамо

$$\overrightarrow{OB} = |x\rangle\langle x|\overrightarrow{OA} = |x\rangle\langle x|e_2\rangle\langle e_2|x\rangle = |x\rangle|\langle e_2|x\rangle|^2, \tag{2.105}$$

где смо употребили претходно (2.104). Укупно, вектор система је дат збиром доприноса појединих компоненти дуж правца $|x\rangle$, односно

$$|x\rangle = |\langle e_1|x\rangle|^2|x\rangle + |\langle e_2|x\rangle|^2|x\rangle + \cdots + |\langle e_n|x\rangle|^n|x\rangle =$$

$$= (|\langle e_1|x\rangle|^2 + |\langle e_2|x\rangle|^2 + \cdots + |\langle e_n|x\rangle|^2)|x\rangle = |x\rangle,$$

јер је збир вероватноћа независних исхода (израз у загради) један. Ето зашто за вероватноће морамо користити квадрате

$$|\langle e_\mu|x\rangle|^2 = |\alpha_\mu|^2 = \alpha_\mu^*\alpha_\mu, \tag{2.106}$$

а не неке друге функције амплитуде α_μ у представљању вектора стања.

Неизвесности материје за нас нису фиктивне, оне су стварне, кажемо објективне су јер их не можемо избећи. Стварне су и вероватноће које из тога произилазе. Према томе, за материјалне вероватноће важи *принцип вероватноће*, грубо речено, да се најчешће догађа оно што је највероватније (в. [8]). Због тих неизбежних неизвесности које се реализују по законима вероватноће, фигуративно говорећи, ја сам овде где сам а не тамо негде, јер је са мог становишта такав положај у овом тренутку највероватнији. Ти си тамо а не овде зато што је са твог становишта такав положај највероватнији. Према томе, опажање вероватноћа је релативно у односу на поједине честице. Свака од њих се креће са свог становишта највероватнијим трајекторијама.

Са друге стране, реализацијом неизвесности настаје *информација*. И једна и друга, неизвесност и информација, материјалне су особине, па су према томе сличне другим особинама физикалне супстанце.

2.7.1 Косинуси углова

На први поглед јесте чудно да се у представљању квантног стања $|x\rangle$ помоћу базних стања $|e_\mu\rangle$ у иначе уобичајеном изразу за векторе

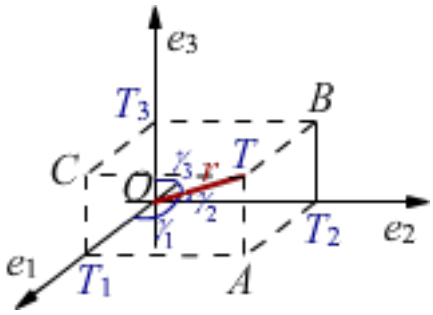
$$|x\rangle = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu |e_\mu\rangle, \tag{2.107}$$

или нотацијом на начин (2.104), појављују коефицијенти α_μ који сами нису вероватноће, већ су вероватноће њихови квадрати $|\alpha_\mu|^2 = \alpha_\mu^* \alpha_\mu$. То је смисао поменутог *Борновог правила*, управо објашњеног. Појаснићемо то сада на још један, још апстрактнији, па ипак познатији начин.

У правоуглом систему координата чије осе из исходишта O дефинишу јединични вектори e_1, e_2, e_3 на слици 2.4, дата је тачка T. Њене окомите пројекције на равни Oe_1e_2, Oe_2e_3 и Oe_3e_1 су редом тачке A, B и C. Пројекције тих тачака редом на координатне осе су тачке T_1, T_2 и T_3. Углови које вектор $\overrightarrow{OT}$ заклапа са координатним осама су редом γ_1, γ_2 и γ_3. Из математике (аналитичке геометрије) знамо да је

$$\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1, \tag{2.108}$$

а то је потврда Борновог правила у репрезентацији (реалних) правоуглих Декартових система.



Slika 2.4: Квадар у правоуглом систему.

Пример 2.7.1. *Докажимо (2.108).*

Доказ. Са слике 2.4 видимо:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2, \quad \overline{OA}^2 = \overline{OT}_1^2 + \overline{AT}_1^2,$$

јер су троуглови OAT и OT_1A правоугли. Правоугли је и троугао OT_1T. Аналогно имамо са остале две осе. Из тригонометрије правоуглог троугла следи:

$$\cos^2\gamma_1 = \left(\frac{\overline{OT}_1}{\overline{OT}}\right)^2, \quad \cos^2\gamma_2 = \left(\frac{\overline{OT}_2}{\overline{OT}}\right)^2, \quad \cos^2\gamma_3 = \left(\frac{\overline{OT}_3}{\overline{OT}}\right)^2,$$

$$\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = \frac{\overline{OT}_1^2 + \overline{OT}_2^2 + \overline{OT}_3^2}{\overline{OT}^2} = \frac{\overline{OT}^2}{\overline{OT}^2} = 1,$$

а то је и требало доказати. □

Дакле, Борнов закон заједно са „чудима“ квантне механике део је шире слике, беспрекорно логичне на начине како то математика може бити. Са друге стране, квантна механика је материјална репрезентација те логике, што значи да она има и сопствене феномене.

2.8 Тензорски производ

Посматрамо неки случајан догађај са два исхода, вероватноћа $u_\mu, v_\nu \in [0,1]$, где су индекси $\mu, \nu \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и важе услови

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1, \\ v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 1. \end{cases} \tag{2.109}$$

Шенонове информације таквих догађаја су:

$$S_u = -\sum_{\mu=1}^{n} u_\mu \log_b u_\mu, \quad S_v = -\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \log_b v_\nu, \tag{2.110}$$

у некој бази ($b > 0$ и $b \neq 1$) логаритма, односно

$$\begin{cases} S_u = -u_1 \ln u_1 - u_2 \ln u_2 - \cdots - u_n \ln u_n, \\ S_v = -v_1 \ln v_1 - v_2 \ln v_2 - \cdots - v_n \ln v_n, \end{cases} \tag{2.111}$$

у природним логаритмима, базе $e = 2,71828\ldots$, чиме је дефинисано „нат“ као јединица информације. Ове догађаје можемо писати као векторе $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ у неком n-дим систему координата:

$$\mathbf{u} = \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \mathbf{e}_\mu, \quad \mathbf{v} = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \mathbf{e}_\nu, \tag{2.112}$$

где су $\mathbf{e}_\mu$ ($\mu = 1, 2, \ldots, n$) јединични вектори координата. Дозволимо ли могућност да координате буду комплексни бројеви ($a_\mu, b_\nu \in \mathbb{C}$) тада је $u_\mu = a_\mu^* a_\mu$ и $v_\nu = b_\nu^* b_\nu$, па за скаларне (унутрашње) производе ових вектора важи:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle = \sum_\mu a_\mu^* a_\mu = \sum_\mu u_\mu = 1, \\ \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = \sum_\nu b_\nu^* b_\nu = \sum_\nu v_\nu = 1. \end{cases} \tag{2.113}$$

Са звездицом (z^*) означавамо конјуговање комплексног броја (z). Посматрамо тензорски производ ових вектора (расподела) $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ и информацију S тог производа.

Тензорски производ догађаја (2.112) је:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n) \otimes (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_\mu b_\nu \, \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu,$$

односно

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_\mu b_\nu \mathbf{e}_{\mu\nu}, \tag{2.114}$$

где су $\mathbf{e}_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu$ јединични вектори координата тензорског производа система. Због (2.113) тада имамо

$$\langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}|\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}\rangle = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} u_\mu u_\nu = 1. \tag{2.115}$$

Наиме:

$$\langle \mathbf{u}\otimes\mathbf{v}|\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\rangle = \sum_{\mu,\nu=1}^{n}(a_\mu^* b_\nu^*)(a_\mu b_\nu) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n}(a_\mu^* a_\nu)(b_\mu^* b_\nu) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} u_\mu v_\nu =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} u_\mu v_\nu = \sum_{\mu=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu\right) u_\mu = \sum_{\mu=1}^{n} u_\mu = 1,$$

чиме је (2.115) доказано.

2.8.1 Сабирање информација

Попут бацања два новчића, сваког са исходом писмо или глава, где добијамо четири резултата ПП, ПГ, ГП и ГГ, у општијем случају расподеле неједнаких вероватноћа два исхода ($n = 2$) имамо тензорски производ вектора (2.112) које сада пишимо:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_a = p_a\,\mathbf{e}_1 + q_a\,\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{r}_b = p_b\,\mathbf{e}_1 + q_b\,\mathbf{e}_2, \end{cases} \tag{2.116}$$

где је $p_a, p_b, q_a, q_b \in (0,1)$, $p_a + q_a = 1$, $p_b + q_b = 1$. Тензорски производ ових вектора је вектор:

$$\mathbf{r}_a \otimes \mathbf{r}_b = (p_a\mathbf{e}_1 + q_a\mathbf{e}_2) \otimes (p_b\mathbf{e}_1 + q_b\mathbf{e}_2) =$$

$$= p_a p_b\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 + p_a q_b\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2 + q_a p_b\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1 + q_a q_b\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2$$

$$= p_a p_b\,\mathbf{e}_{11} + p_a q_b\,\mathbf{e}_{12} + q_a p_b\,\mathbf{e}_{21} + q_a q_b\,\mathbf{e}_{22},$$

где су $\mathbf{e}_{\mu\nu}$ јединични вектори 4-дим координата тензорског производа 2-дим простора. Наравно, можемо користити и претходне ознаке, као у следећој леми.

Лема 2.8.1. *За информацију 2-дим тензорских догађаја важи*

$$S = S_u + S_v, \tag{2.117}$$

за независне догађаје.

Доказ. Информација таквог производа вектора је:

$$S = -u_1v_1\ln u_1v_1 - u_1v_2\ln u_1v_2 - u_2v_1\ln u_2v_1 - u_2v_2\ln u_2v_2 =$$

$$= -(u_1v_1 + u_1v_2)\ln u_1 - (u_1v_1 + u_2v_1)\ln v_1 - (u_2v_1 + u_2v_2)\ln u_2 - (u_1v_2 + u_2v_2)\ln v_2$$

$$= -u_1(v_1 + v_2)\ln u_1 - v_1(u_1 + u_2)\ln v_1 - u_2(v_1 + v_2)\ln u_2 - v_2(u_1 + u_2)\ln v_2$$

$$= -u_1\ln u_1 - v_1\ln v_1 - u_2\ln u_2 - v_2\ln v_2$$

$$= S_u + S_v,$$

па је (2.117) доказано. □

О чему се овде ради погледајмо са мало логаритамског рачуна. Из (2.117) добијамо:

$$-\ln(u_1^{u_1}v_1^{v_1}u_2^{u_2}v_2^{v_2}) = -\ln(u_1^{u_1}v_1^{v_1}) - \ln(u_2^{u_2}v_2^{v_2}), \tag{2.118}$$

што је тачно. Ово се затим лако поопштава у једнакост

$$-\ln(u_1^{u_1}v_1^{v_1}u_2^{u_2}v_2^{v_2}\ldots u_n^{u_n}v_n^{v_n}) = -\ln(u_1^{u_1}v_1^{v_1}) - \ln(u_2^{u_2}v_2^{v_2}) - \cdots - \ln(u_n^{u_n}v_n^{v_n}), \tag{2.119}$$

за сваки природан број $n = 1, 2, 3, \ldots$, а отуда следећа лема.

Лема 2.8.2. *Ако за дати природни број $n \in \mathbb{N}$ и свако $k = 1, 2, \ldots, n$ важи $p_k, q_k \in [0, 1]$, $p_k + q_k = 1$ и $S_k = -p_k \ln p_k - q_k \ln q_k$, тада је $S = S_1 + \cdots + S_n$ Шенонова информација тензорског производа свих вектора $\mathbf{r}_k = p_k \mathbf{e}_1 + q_k \mathbf{e}_2$ за $k = 1, 2, \ldots, n$ редом.*

Коначно, примењујући ове две леме и њихове начине доказивања може се доказати и теорема 2.8.3.

Теорема 2.8.3. *Ако су дате (независне) расподеле вероватноћа (2.109) информација (2.110) векторима (2.112), онда је информација њиховог тензорског производа (2.114) једнака збиру датих иноформација, $S = S_a + S_b$.*

Доказ. Информација тензорског производа је:

$$S = -\sum_{\mu,\nu=1}^{n} u_\mu v_\nu \ln u_\mu v_\nu = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} u_\mu v_\nu(-\ln u_\mu - \ln v_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \left(\sum_{\mu=1}^{n} -u_\mu \ln u_\mu\right) + \sum_{\mu=1}^{n} u_\mu \left(\sum_{\nu=1}^{n} -v_\nu \ln v_\nu\right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu S_a + \sum_{\mu=1}^{n} u_\mu S_b = S_a + S_b,$$

а тиме је теорема доказана. □

2.8.2 Множење оператора

Посматрајмо производ бинома

$$(\hat{A} + \hat{B})(\hat{A} + \hat{B}) = \hat{A}^2 + (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}) + \hat{B}^2, \tag{2.120}$$

где су $\hat{A}$ и $\hat{B}$ линеарни оператори. Познато је да су квантна стања (рецимо $|\psi\rangle$) репрезентације вектора Хилбертове алгебре, а да су еволуције унитарни оператори (рецимо $\hat{A}$). Код таквих, сопствена једначина

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle, \tag{2.121}$$

даје сопствену вредност која показује вероватноћу (a^*a) да ће се дата обзервабла реализовати. То је познато па да не дужим (в. [4]).

Оно што би овде могло бити ново је запажање да је збир две информације добијене из два деловања попут

$$(\hat{A} + \hat{B})|\psi\rangle = (a + b)|\psi\rangle, \tag{2.122}$$

мањи од спрегнуте информације квадрата (2.120) у случају када је

$$\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = 0, \tag{2.123}$$

односно када су оператори *антикомутативни.* То је просто зато што је

$$-u^2 \ln u^2 - v^2 \ln v^2 < 2(-u \ln u - v \ln v), \tag{2.124}$$

за одговарајућу расподелу. Ово (в. у даљем тексту) значи да су *фермиони* у дефициту информације, да *Паулијев принцип искључења* важи тамо где је мањак информације. Пример таквог је атом.

Мањак информације фермиона и ту врсту спрегнутости, која је у вези са Паулијевим принципом искључења, треба разликовати од мањка информације због засићења, а које можете пратити у различитим дискретним расподелама детаљно описаним у мојој књизи „Физичка информација“ (в. [2]). Са друге стране, постоје и другачије редукције информације каква је *квантна спрегнутост.*

2.9 Кјубит

У затвореним квантним системима неке физичке величине не мењају своју вредност. За њих важе *закони конзервације* попут закона одржања енергије: „енергија не може настати ни из чега нити нестати ни у шта већ се може само мењати из једног облика у други“. Под затвореним физичким системима подразумевамо изоловане од деловања вањских сила и такве у којима су конзервиране посебно маса, енергија, импулс, спин, па и информација. Ако је њихова укупна количина временом константна, за њих кажемо да су *конзервирани системи*.

Из [8] знамо да сила мења вероватноће, па према томе и информацију, али да је укупна количина неизвесности и произведене информације и под дејством сила константна. Међутим, у одсуству (вањских) сила нема промена, нити количине неизвесности, нити информације, па у конзервираним системима (у одсуству вањских сила) важи закон *конзервације информације*.

Стога, слично класичним техничким повратним информацијама *капија* или *коло* (енг. gate), спонтани развој квантног система (еволуција квантног стања) не губи информације. Како се систем развија, информације се стално чувају (у прошлости). Међутим, за разлику од техничких направа, не можемо се вратити у прошлост, тако да нам треба ново име за „квантна врата“ да бисмо их разликовали. Такође имамо изразе *прекидач* или *вентил* (у мојим текстовима) за једноставне техничке склопове, али овде ћемо користити стара имена, кола и капије, подразумевајући реверзибилност, јер се не бавимо другима.

Наравно, за математичара је избор таквих назива произвољан, али овде се ради и о физици и техници. За разлику од техничког уређаја којег направимо и користимо, квантно стање затичемо па га тек онда евентуално прилагођавамо. Оно се развија само или под утицајем вањских сила на начин који ми, за сада, једва да контролишемо. За разлику од класичних компјутера које људи нису затекли у природи, већ су их правили да би их имали, тек од недавно (од 20. века) примећујемо да су квантни компјутери свуда око нас, а питање је да ли ћемо и када ћемо их моћи користити. То је један од разлога употребе различитих термина.

Адамарова[27] *капија* (енг. Hadamard gate) ради на једном *кјубиту* (квантни бит – јединица квантне информације). Стање кјубита $|\psi\rangle$ је линеарна *суперпозиција* основних стања квантне механике $|1\rangle$ и $|0\rangle$, рецимо

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.125}$$

која у макро-свету одговарају исходима бацања новчића:

$$|\psi\rangle = z_0|0\rangle + z_1|1\rangle. \tag{2.126}$$

Комплексни бројеви $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ су амплитуде *Борнових* вероватноћа. Збир квадрата модула ових бројева је један

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1, \tag{2.127}$$

када је реализација бар једног од основних стања сигуран догађај.

При мерењу кјубита у стандардној бази, исход $|0\rangle$ има вероватноћу $|z_0|^2$, а исход $|1\rangle$ вероватнћу $|z_1|^2$. Збир квадрата косинуса и синуса угла је јединица, па (2.126) можемо

[27] Jacques Hadamard (1865-1963), француски математичар.

написати као ротацију, сменом $z_0 = \cos\frac{\theta}{2}$ и $z_1 = e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}$. Посебна ротација кјубита је Адамарова трансформација, коју за сада називамо Адамарова капија.

Користећи *Диракову нотацију*, Адамарову капију дефинишемо са:

$$|0\rangle \to \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |1\rangle \to \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{2.128}$$

па настављамо са (2.126):

$$|\psi\rangle = z_0|0\rangle + z_1|1\rangle \to z_0\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) + z_1\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right),$$

што након алгебарског сређивања постаје

$$|\psi\rangle = \frac{z_0 + z_1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{z_0 - z_1}{\sqrt{2}}|1\rangle. \tag{2.129}$$

Спољашњи производ ове суперпозиције пишемо

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\langle 0| + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\langle 1|,$$

а то одговара *Адамаровој матрици*

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.130}$$

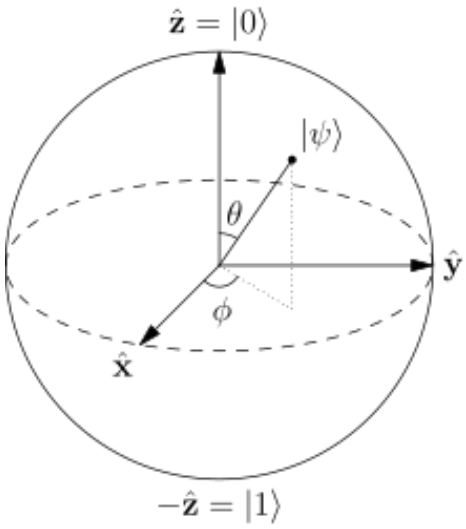
у бази $|0\rangle$, $|1\rangle$. Очигледно је да узастопно конјуговање па транспоновање не мења Адамарову матрицу, $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$, што по себи значи да је ова матрица симетрична и да је њен квадрат идентичка, јединична матрица, $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$. Ових пар страна су само најаве следећих тема.

2.9.1 Много светова

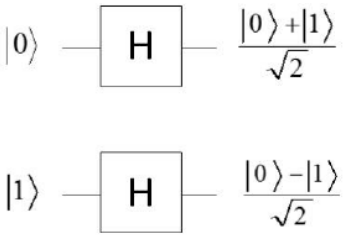
Поменуте квантне ротације кјубита, из којих смо извукли Адамарову, налазе се на *Блоховој сфери* приказаној на слици 2.5. У квантној механици Блохова сфера је геометријска репрезентација квантних стања са два нивоа какав је кјубит.

То је сфера јединичног полупречника у *Хилбертовом простору*, односно пројективном Хилбертовом простору, са наспрамним тачкама које одговарају пару узајамно окомитих вектора стања. Северни и јужни пол Блохове сфере се обично бира тако да одговара базним векторима $|0\rangle$ и $|1\rangle$ што заузврат одговара горњем и доњем стању спина електрона. Тачке на површини сфере одговарају *чистим стањима* (од којих ће се једно сигурно десити), док унутрашњости сфере одговарају *мешана стања* (чији је збир вероватноћа мањи од један). Блохова сфера се може проширити на n-димензионални квантни систем, али она тада престаје бити модел за кјубит, а и њена визуелна корист је мања.

Симбол и деловање Адамарове капије је приказан сликом 2.6. Приметимо да она преокреће изјашњена стања у два једнако вероватна неизјашњена стања и обрнуто. Због општости ове капије, то је опште запажање о еволуцији квантних стања. Са принципом вероватноће, *аксиом објективне случајности*, из књиге [8], ово запажање води ка необичним закључцима о природи васионе.



Slika 2.5: Блохова сфера.



Slika 2.6: Адамаров вентил.

На пример, ако бацањем новчића доносимо одлуку о избору пута за наставак свог живота и ако је падање „писма“ односно „главе“ врста објективне случајности, онда независно од тога како је новчић пао – закони физике се неће променити. Међутим, ЈА након избора „писмо“ и ЈА након избора „глава“ неће живети у истој физичкој реалности. Назовимо их паралелним реалностима у *мултиверзуму*, називима из спекулативне физике са коренима у античкој грчкој митологији. *Еверет* је на сличнима 1957. године заснивао своју интерпретацију квантне механике називајући је *много светова* (енг. many-worlds).

Након што се његова сада већ прослављена теорија више свемира сусрела с презиром, Еверет је напустио свет академске физике и окренуо се тајним војним истраживањима и водио трагичан приватни живот[28], па је његова основна идеја остала недовршена. Тако је остало отворено и питање како то наша свест путује „запакована“ у 4-Д простор-време[29], а да је шире окружење бар 6-Д? Зато је била неизбежна ова књига и изједначавање информације са физичким дејством, да бисмо могли рећи да без промене времена нема информације. Производ неодређености (промене) енергије и времена је квант дејства, али и информације, па када нема продора дуж временске осе онда у том од „много-светова“ нема нити информације.

Да између две реалности нема значајне непосредне физичке комуникације следи и

[28]Цитат из: `https://www.scientificamerican.com/article/hugh-everett-biography/`.
[29]в. „1.12 Слободна воља“ у [2].

из закона одржања. Адамарова капија ће неизвесност превести у извесност, могућности у само једно моје ЈА, али ће другим узастопним деловањем урадити обрнуто и моје паралелно ЈА ће вратити назад у једну од опција моје претходне неизвесности. Тако је са мог становишта. Са становишта посматрача (честице) коме време иде унатрашке опажање тих догађаја је симетрично. Једном посматрачу Адамарова капија преводи неизвесности у информацију, а другом купи такве реализације из паралелних реалности, тада као неизвесности, преводећи их назад у информацију.

За једног од два посматрача супротних токова времена дешава се реализација неизвесности у информацију док се за другог дешава обрнуто. Другоме информација и неизвесност имају замењене улоге.

Осврнимо се мало и на познату физику и познате задатке у вези са Адамаровом капијом. Многи квантни алгоритми користе Адамарову трансформацију као почетни корак, када пресликавање $n = 1, 2, 3, \ldots$ кјубита може бити рађено један по један. Адамарова матрица се може сматрати и Фуријеовом[30] трансформацијом на дво-елементној адитивној групи (модула 2).

2.9.2 Примери суперопзиција

Пример 2.9.1. *Применити Адамарову матрицу на основне векторе.*

Решење. Узимамо да је:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Матрично множење даје:

$$\mathbf{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

□

Пример 2.9.2. *Узастопна примена два Адамарова вентила на основне векторе.*

Решење. Имамо узастопне трансформације (слика 2.7):

$$|0\rangle \to \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = |0\rangle,$$

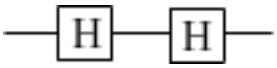
$$|1\rangle \to \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = |1\rangle.$$

Другим речима, квадрат Адамарове матрице је јединична матрица. □

Познато је да је тзв. прва *Паулијева*[31] матрица, σ_x, репрезентација негације у квантним колима:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x|1\rangle = |0\rangle, \quad \sigma_x|0\rangle = |1\rangle. \tag{2.131}$$

[30] Joseph Fourier (1768-1830), француски математичар и физичар.
[31] Wolfgang Pauli (1900-1958), аустријско-швајцарско-амерички теоријски физичар.



Slika 2.7: Два Адамарова вентила.

Слични су и следећи али мало сложенији примери; они су за ниво студената квантне механике или информационих технологија.

Пример 2.9.3. *Написати матрицу за ротацију око y-осе Блохове сфере за испружен угао (π радијана). Она пресликава* $|0\rangle \to i|1\rangle$ *и* $|1\rangle \to -i|0\rangle$.

Решење. То је друга Паулијева матрица:

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.132}$$

Матричним множењем добијамо:

$$\sigma_y|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i|1\rangle, \quad \sigma_y|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i|0\rangle.$$

Такође је $\sigma_y^2 = I$. □

Пример 2.9.4. *Написати матрицу ротације око z-осе Блохове сфере за испружен угао,* 180°. *Она оставља основно стање* $|0\rangle$ *непромењено, а пресликава* $|1\rangle$ *у* $-|1\rangle$.

Решење. То је трећа Паулијева матрица:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.133}$$

Матричним множењем добијамо:

$$\sigma_z|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle, \quad \sigma_z|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle.$$

Опет је $\sigma_z^2 = I$. □

Паулијеве матрице и јесу дефинисане тако да њихов квадрат буде јединична матрица, $\sigma^2 = I$. Са друге стране, Адамарова матрица је $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z)$. Инволуторна или кажемо *инволутивна матрица* је она која је сама себи инверзна. Другим речима, множење матрице A је инволутивност (само-инверзија) ако и само ако је $A^2 = I$. Инволутивне матрице су квадратни корени јединичних матрица.

Пример 2.9.5 (Инволутивна матрица)**.** *Нека је* $x \in \mathbb{R}$, *а* σ *нека је инволутивна матрица, тј. таква да је њен квадрат јединична матрица,* $\sigma^2 = I$. *Показати да је тада* $e^{ix\hat{\sigma}} = I\cos x + i\hat{\sigma}\sin x$.

Решење. Користимо Маклоренове (Тејлорове) развоје у редове:

$$e^{ix\hat{\sigma}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix\hat{\sigma})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix\hat{\sigma})^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix\hat{\sigma})^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \hat{I} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \hat{\sigma}$$
$$= (\cos x)\, \hat{I} + i(\sin x)\, \hat{\sigma}.$$

□

Пример 2.9.6. *Изразити Адамарову матрицу помоћу производа Паулијевих.*

Решење. Из претходног примера је:

$$\exp(i\pi\sigma_x/4) = (I + i\sigma_x)/\sqrt{2}, \quad \exp(i\pi\sigma_z/4) = (I + i\sigma_z)/\sqrt{2}.$$

То су ротације σ_x и σ_z за угао $\pi/4$. Отуда:

$$\frac{(I + i\sigma_x)}{\sqrt{2}} \frac{(I + i\sigma_z)}{\sqrt{2}} \frac{(I + i\sigma_x)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(I + i(\sigma_x + \sigma_z) - \sigma_x\sigma_z)(I + i\sigma_x) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(I + i(\sigma_x + \sigma_z) - \sigma_x\sigma_z + i\sigma_x - I - \sigma_z\sigma_x - i\sigma_x\sigma_z\sigma_x)$$
$$= \frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) = iH,$$

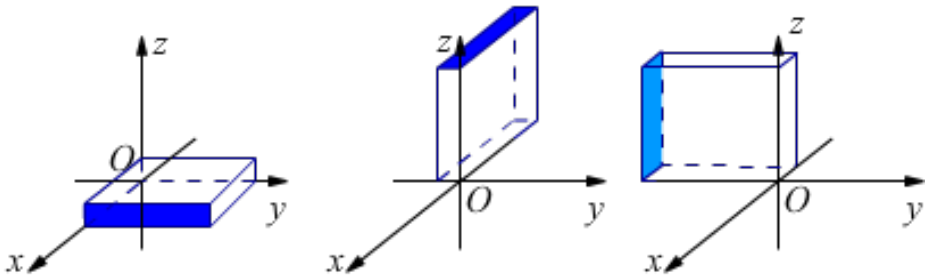
јер из $\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x = 0$ следи $\sigma_z\sigma_z\sigma_x = -\sigma_z$. Отуда

$$H = e^{-i\pi/2} e^{i\pi\sigma_x/4} e^{i\pi\sigma_z/4} e^{i\pi\sigma_x/4}.$$

□

2.10 Принцип неодређености

Познато нам је да се зависни процеси квантне механике представљају некомутативним операторима. Нека су ρ_x и ρ_y редом ротације око x и y-осе за $90°$ правоуглог Декартовог система $Oxyz$ на слици 2.8, а K квадар приказан на првој слици лево. Тада је K_{yx} квадар на слици у средини, добијен композицијом $\rho_y \circ \rho_x : K \to K_{yx}$, а на истој слици десно је квадар $\rho_x \circ \rho_y : K \to K_{xy}$. Очигледно је да $K_{yx} \neq K_{xy}$, односно $\rho_y \circ \rho_x \neq \rho_x \circ \rho_y$. Дакле, композиције ротација у 3-Д нису комутативне.



Slika 2.8: Ротације квадра око x и y осе.

Други пример је *информација перцепције* (2.2) где се вектори „интелигенције“ и „хијерархије“ подешавају један према другоме тако да би њихов скаларни производ био што мањи. Трећи пример, овде помињан (2.123), је антикомутативност.

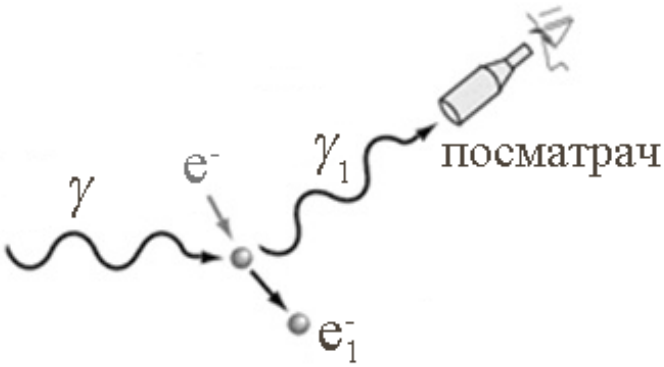
Неодређености електрона

Посебна ситуација настаје мерењем импулса и положаја електрона e^- помоћу судара са фотоном γ приказаном на слици 2.9. То је један од првих описа након откривања Хајзенбергових *релација неодређености* [25] и заснивања квантне механике.

У тим првобитним разматрањима експеримената примећено је да постоје границе онога што можемо видети о електрону. Из „елементарне формуле Комптоновог ефекта“ Хајзенберг је 1927. године *процeнио* да производ непрецизности мерења импулса Δp електрона и његовог положаја Δx мора бити реда

$$\Delta p \Delta x \sim h, \tag{2.134}$$

где је h Планкова константа. Импулс електрона је p, а његов положај x. Позиција фотона је „размазана“ по таласној дужини λ а импулс му је количник h/λ. Опажање електрона након судара са фотоном постаје „размазано“ за $\Delta p = h/\lambda$ и $\Delta x = \lambda$, што сменом са претходним даје $\Delta p = h/\Delta x$, те $\Delta p \Delta x = h$, а то је поменута Хајзенбергова процена.



Slika 2.9: Неодређеност електрона.

Иста се процена може добити користећи честице са масом m и брзином v, помоћу *Луј де Бројевог* израза за таласну дужину $\lambda = h/p$. Тада је $\Delta p = mv$ и $\Delta x = h/mv$, па сменом добијамо опет $\Delta p \Delta x = h$.

Из ових метода наслућујемо да неодређености мерења импулса и положаја долазе из расипања у оквиру таласне дужине која нам не даје тачан положај онога чиме меримо, па тиме и онога шта меримо. Тако нам се може учинити да то нема много везе са стварном случајношћу, већ да је последица само наших „лоших“ алатки. Али како Луј де Бројев закон о таласној природи супстанце важи за сваку врсту материје, закључујемо да и не постоје „боље“ алатке. Дакле не постоји ништа у овој васиони чиме бисмо могли оспорити Хајзенбергову процену (2.134), па преостаје још само да видимо да ли се она слаже са законима вероватноће.

Да је то заиста тако доказивао је 1927. године Кенард[32] (в. [24]), а следеће године и Вејл[33] (в. [23]) открившi формулу за дисперзије импулса σ_p и положаја σ_x честице:

$$\sigma_p \sigma_x \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{2.135}$$

[32]Earle Hesse Kennard (1885-1968), теоријски физичар и професор Универзитета Корнел.
[33]Hermann Weyl (1885-1955), немачки математичар, теоријски физичар и филозоф.

где је $\hbar = h/(2\pi)$ редукована Планкова константа.

2.10.1 Неодређености дисперзија

Размотримо то детаљније. Просечна или *средња вредност* бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$, односно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ се често означава цртом изнад, па пишемо:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad \bar{p} = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}, \tag{2.136}$$

за разлику од Диракове *нотације* којом би исте средње вредности писали као $\langle x \rangle$ и $\langle p \rangle$. Интервал грешке или неодређености у одређивању тих бројева је:

$$\Delta x = x - \bar{x}, \quad \Delta p = p - \bar{p}. \tag{2.137}$$

Средња вредност ових интервала је нула:

$$\overline{\Delta x} = \overline{x - \bar{x}} = \bar{x} - \bar{x} = 0, \quad \overline{\Delta p} = \overline{p - \bar{p}} = \bar{p} - \bar{p} = 0, \tag{2.138}$$

што је очигледно. Средње квадратно одступање дефинише *дисперзију* σ:

$$\begin{cases} \overline{(\Delta x)^2} = [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]/n \\ \overline{(\Delta p)^2} = [(p_1 - \bar{p})^2 + (p_2 - \bar{p})^2 + \cdots + (p_n - \bar{p})^2]/n, \end{cases} \tag{2.139}$$

за коју је овде $\sigma^2(x) = \overline{(\Delta x)^2}$, $\sigma^2(p) = \overline{(\Delta p)^2}$, па за грешке мерења узимамо

$$\sigma(x) = \sqrt{\overline{(\Delta x)^2}}, \quad \sigma(p) = \sqrt{\overline{(\Delta p)^2}}. \tag{2.140}$$

На тај начин Хајзенбергове релације неодређености постају

$$\sigma(x) \cdot \sigma(p) \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{2.141}$$

у складу са (2.135). Подразумевана је само апсциса. Овај резултат добијао је и Хајзенберг (в. [22]), на мало другачији начин.

2.10.2 Средња квадратна одступања

За средње квадратно одступање се узима:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - 2\overline{x\bar{x}} + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \quad \overline{(\Delta p)^2} = \overline{(p - \bar{p})^2} = \overline{p^2} - \bar{p}^2,$$

када је координатни почетак у тачки $\bar{x}$, а онда је и $\bar{p} = 0$, па имамо:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{x^2}, \quad \overline{(\Delta p)^2} = \overline{p^2}. \tag{2.142}$$

За средње вредности у квантној механици добићемо:

$$\begin{cases} \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x^2 \psi(x)\, dx, \\ \overline{p^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) p^2 \psi(x)\, dx = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\, dx. \end{cases} \tag{2.143}$$

То су првобитне вредности које су добили Хајзенберг и Вејл, а затим Паули и други. Из доњег интеграла се добија:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{d^2\psi}{dx^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\, d\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \psi^* \frac{d\psi}{dx}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{dx}\, d\psi^* =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi^*}{dx}\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2 dx,$$

а отуда

$$\overline{p^2} = \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2 dx. \tag{2.144}$$

Хајзенберг даље наставља са очигледном неједнакошћу:

$$\left|\frac{x}{2\overline{(\Delta x)^2}}\psi(x) + \frac{d\psi(x)}{dx}\right|^2 \geq 0,$$

$$\frac{x^2|\psi|^2}{4[\overline{(\Delta x)^2}]^2} + \frac{x\psi}{\overline{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{d\psi}{dx} + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 \geq 0,$$

$$\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2 \geq -\frac{x\psi}{\overline{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{d\psi}{dx} - \frac{x^2|\psi|^2}{4[\overline{(\Delta x)^2}]^2}.$$

Али због:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x|\psi|^2}{2\overline{(\Delta x)^2}}\right] = \frac{x\psi}{\overline{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{d\psi}{dx} + \frac{|\psi|^2}{2\overline{(\Delta x)^2}},$$

$$-\frac{x\psi}{\overline{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{d\psi}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{x|\psi|^2}{2\overline{(\Delta x)^2}}\right] + \frac{|\psi|^2}{2\overline{(\Delta x)^2}},$$

сменом добијамо:

$$\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2 \geq \frac{|\psi|^2}{2\overline{(\Delta x)^2}} - \frac{d}{dx}\left[\frac{x|\psi|^2}{2\overline{(\Delta x)^2}}\right] - \frac{x^2}{4}\frac{|\psi|^2}{[\overline{(\Delta x)^2}]^2}.$$

Множењем са $\hbar^2$ и интегрирањем препознајемо

$$\overline{p^2} = \overline{(\Delta p)^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} \cdot \frac{1}{\overline{(\Delta x)^2}}\left[2\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2|\psi|^2 dx}{[\overline{(\Delta x)^2}]^2}\right] - \left.\frac{x|\psi|^2}{2\overline{(\Delta x)^2}}\right|_{-\infty}^{\infty}.$$

Даље, из

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi|^2\,dx = \overline{x^2} = \overline{(\Delta x)^2},$$

добијамо

$$\overline{p^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} \cdot \frac{1}{\overline{(\Delta x)^2}},$$

а отуда

$$\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} \cdot \sqrt{\overline{(\Delta p)^2}} \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{2.145}$$

са ознакама еквивалентним (2.140). Исто се може написати и у облику

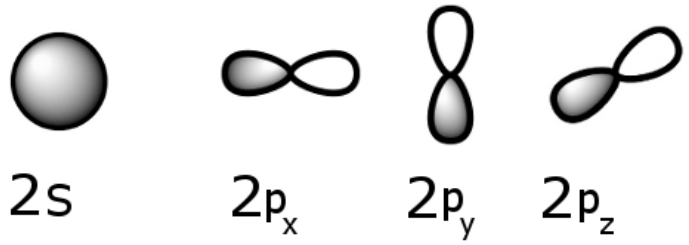
$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{2.146}$$

који је мало непрецизан претходни израз.

2.10.3 Примена у хемији

Хајзенбергов принцип неодређености је брзо нашао примену у хемији. Орбите попуњене електронима не могу бити прецизно цртане. Њих добијамо из вероватноћа дистрибуције електрона. У најбољем случају орбита електрона се може проценити са 90% шансе да је електрон у датој запремини у датом времену. Остало време он је негде другде. На слици 2.10 су типичне орбитале.

Електрони су ти делови који атом чине атомом, а орбите атома су места где се највероватније налазе електрони. Сама реч „орбита“ дошла је са Боровим моделом атома по којем се електрони крећу око језгра слично планетама око сунца. Прва сфера, 1s, најближа је језгри атома са највише два електрона који имају најнижи ниво енергије. За хелијум (He) са два електрона прва орбита је довољна. Међутим, литијум (Li) има три електрона и трећи електрон мора ићи у следећу сферу, $2s$ орбиту, на виши ниво енергије. Берилијум (Be) има два електрона у првој сфери ($1s$) и два електрона у другој сфери ($2s$).



Slika 2.10: Орбите електрона у атому.

Бор (B) који има пет електрона почиње да попуњава трећу орбиту. Његове три орбите су узајамно окомите (енг. perpendicular) и означавају се са 2p. Орбиту која се пружа попут 3-Д осмица, односно балона дуж апсцисе означавамо $2p_x$. Аналогно са $2p_y$ и $2p_z$ означавамо орбите дуж ординате и апликате. Облик орбите одређен је највероватнијим положајима налажења електрона. Атом са још више електрона има и сферне и окомите орбите. Тако неон (Ne) има орбите $1s^2$ $2s^2$ $2p^6$, јер има десет електрона (2+2+6).

Даља сферна орбита, 3s, преузима следећа два електрона још виших енергија. Тако натријум (Na) може имати 11 електрона, по два у прве две сферне орбите (1s и 2s), по два у окомитим орбитама ($2p_x$, $2p_y$ и $2p_z$) и један у сферној орбити 3s. Атом затим може имати пет d-орбита, свака са највише по два електрона. Облик сваке орбите је и даље такав да је вероватноћа налажења електрона у њој око 90%. Иза тих налази се седам f-орбита, у којима се такође може наћи до два електрона.

2.10.4 Избегавање неодређености

Објашњење орбита атома је једна од најважнијих потврда Хајзенберговог принципа неодређености. Озбиљних сумњи у тај принцип данас у физици скоро да и нема, али има све тачнијих мерења којима се тај принцип све успешније избегава.

Недавним радом Института за фотоне (в. [6]) је посебним техникама сличним жироскопском ефекту атома успешно усмераван спин електрона и језгра за добијање информације о положају тела атома и избегаван принцип неодређености. Трик долази

из запажања да спин нема само један, већ два угла усмеравања, један правца северно-источно-јужно-западно, а други са елевацијом изнад хоризонта.

Тим истраживача је показао како скоро сву неизвесност ставити у угао који се не мери инструментом. На тај начин, они се још увек држе Хајзенберговог захтева за неизвесношћу, али прикривају ону неизвесност која им не одговара. Резултат је мерење угловне амплитуде са прецизношћу без преседана, која није ометена квантном неодређеношћу.

Учесник овог експеримента, проф. Мичел каже да је принцип неодређености веома фрустрирајући за научнике: „Ми бисмо да знамо све, али Хајзенберг каже да то није могуће“. Међутим, пронашли смо пут да сазнамо све што нам је битно. Као у песми Ролингстонса: „Не можеш увек добити шта хоћеш / али ако покушаш понекад / да, могао би видети / да добијаш оно што ти треба“.

2.10.5 Примери извођења

Пример 2.10.1. *Извести релације неодређености (2.145) полазећи од неједнакости*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \lambda x \psi + \frac{d\psi}{dx} \right|^2 \geq 0,$$

као очигледне, па је даље третирати као квадратну неједначину по λ.

Решење. Израчунавамо редом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\lambda x \psi^* + \frac{d\psi^*}{dx} \right) \left(\lambda x \psi + \frac{d\psi}{dx} \right) \geq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 x^2 \psi^* \psi \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda x \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi^*}{dx} \cdot \frac{d\psi}{dx} \, dx \geq 0,$$

$$\lambda^2 \overline{x^2} + \lambda x (\psi^* \psi) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, dx + \frac{\overline{p^2}}{\hbar^2} \geq 0,$$

$$\overline{(\Delta x)^2} \lambda^2 - \lambda + \frac{\overline{(\Delta p)^2}}{\hbar^2} \geq 0.$$

Да би неједнакост била тачна, за дискриминанту квадратне једначине важи:

$$1 - 4 \cdot \overline{(\Delta x)^2} \cdot \frac{\overline{(\Delta p)^2}}{\hbar^2} \leq 0,$$

$$\overline{(\Delta x)^2} \cdot \overline{(\Delta p)^2} \geq \frac{\hbar^2}{4},$$

а отуда тражено (2.145). □

У време заснивања квантне механике, првом половином 20. века, тражени су разни докази принципа неодређености. Овај у наведеном примеру заснован је на средњим вредностима квадрата неодређености:

$$\begin{cases} \overline{x^2} = \overline{(\Delta x)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi|^2 \, dx \\ \overline{p^2} = \overline{(\Delta p)^2} = \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 \, dx \end{cases} \tag{2.147}$$

и на квадратној једначини. Следећи се заснива на *Хелдеровој неједнакости*

$$\int_X |f|^2\,dx \cdot \int_X |g|^2\,dx \geq \left|\int_X f^* g\,dx\right|^2, \tag{2.148}$$

која се у овом облику назива и *Буњаковски*[34]*-Шварцоова*[35] *неједнакост.*

Пођимо од два линеарна оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$, од израза:

$$\overline{(\Delta A)^2} = \int_X \psi^* |\hat{A} - \bar{A}|^2 \psi\,dx, \quad \overline{(\Delta B)^2} = \int_X \psi^* |\hat{B} - \bar{B}|^2 \psi\,dx, \tag{2.149}$$

па ставимо $\hat{A} - \bar{A} = \hat{a}$ и $\hat{B} - \bar{B} = \hat{b}$. Имамо:

$$\overline{(\Delta A)^2} = \int_X \psi^* |\hat{a}|^2 \psi\,dx = \int_X \hat{a}^* \psi^* \hat{a}\psi\,dx = \int_X |\hat{a}\psi|^2\,dx, \quad \overline{(\Delta B)^2} = \int_X |\hat{b}\psi|^2\,dx,$$

$$\overline{(\Delta A)^2} \cdot \overline{(\Delta B)^2} = \int_X |\hat{a}\psi|^2\,dx \cdot \int_X |\hat{b}\psi|^2\,dx,$$

$$\overline{(\Delta A)^2} \cdot \overline{(\Delta B)^2} \geq \left|\int_X \psi^* \hat{a}\hat{b}\psi\,dx\right|^2,$$

што следи из (2.148). Како је

$$\hat{a}\hat{b} = \frac{\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}}{2} + \frac{\hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}}{2},$$

то је:

$$\overline{(\Delta A)^2} \cdot \overline{(\Delta B)^2} \geq \left|\int_X \psi^* \left(\frac{\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}}{2} + \frac{\hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}}{2}\right)\psi\,dx\right|^2,$$

$$\overline{(\Delta A)^2} \cdot \overline{(\Delta B)^2} \geq \left|\int_X \psi^* \frac{\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}}{2}\psi\,dx + \int_X \psi^* \frac{\hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}}{2}\psi\,dx\right|^2,$$

$$\overline{(\Delta A)^2} \cdot \overline{(\Delta B)^2} \geq \left|\int_X \psi^* \frac{\hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}}{2}\psi\,dx\right|^2.$$

Оператори под интегралима су самоконјуговани, што значи да се средње вредности могу сматрати парним бројевима, рецимо $2m$ и $2n$, где $I \geq m^2 + n^2$ па $I \geq n^2$. Ова неједнакост постаје једнакост када су функције пропорционалне, када је

$$\hat{b}\psi = C\hat{a}\psi,$$

а тада смена даје

$$(C^* + C)\overline{\hat{a}^2} = 0,$$

па је $C^* = -C$, јер $\overline{\hat{a}^2}$ није једнако нули. Према томе, C је чисто имагинарна константа и можемо ставити $C = i\beta$, где је β реална константа.

Додатно, израчунавамо комутатор:

$$[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a} = \cdots = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}].$$

[34]Viktor Bunyakovsky (1804-1889), руски математичар.
[35]Hermann Schwarz (1843-1921), немачки математичар.

Па имамо:

$$\overline{(\Delta A)^2} \cdot \overline{(\Delta B)^2} \geq \left| \int_X \psi^* \frac{\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}}{2} \psi \, dx \right|^2 = \left| \frac{\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}}{2} \right|^2 . \tag{2.150}$$

То је веома важан резултат за разумевање принципа неодређености!

Производ неодређености линеарних оператора не може бити мањи од апсолутне вредности половине њиховог комутатора

$$\sqrt{\overline{(\Delta A)^2}} \cdot \sqrt{\overline{(\Delta B)^2}} \geq \left| \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{2} \right| . \tag{2.151}$$

Из овог општег израза, којим је оправдан назив *принципа неодређености*, следе Хајзенбергове релације неодређености, затим и убеђење да оне долазе из некомутативности процеса, те да су оне такође и израз квантне спрегнутости. За ово последње приметимо да превелика умешаност позадинских закона физике у процес мерења омета крајњу тачност самог мерења. Као да је материјално другоразредно у односу на апстрактно.

2.10.6 Оператори импулса и енергије

Из записа Шредингерове једначине видљиво је да је *оператор енергије*

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \tag{2.152}$$

где је $\hbar$ Планкова редукована константа, i је имагинарна јединица, а парцијални изводи (означени са ∂) се користе уместо тоталних деривација (d/dt) јер је таласна функција $\psi(\mathbf{r}, t)$ такође функција положаја $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$. *Оператор импулса* редом дуж апсцисе, ординате и апликате, је:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.153}$$

У аналогији са класичном механиком, где је Хамилтонијан збир кинетичке и потенцијалне енергије система, овде имамо *оператор Хамилтонијан*

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}, \tag{2.154}$$

где је

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \tag{2.155}$$

оператор *кинетичке енергије*, па је $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ оператор импулса (све три координате), а $\hat{V} = V = V(\mathbf{r}, t)$ је оператор *потенцијалне енергије*.

Први пример су оператори положаја и импулса. Сада имамо:

$$\sqrt{\overline{(\Delta \hat{x})^2}} \cdot \sqrt{\overline{(\Delta \hat{p})^2}} \geq \left| \frac{[\hat{x}, \hat{p}]}{2} \right| = \left| \frac{i\hbar}{2} \right| = \frac{\hbar}{2},$$

а то су познате Хајзенбергове релације неодређености (2.145).

Други пример су оператори енергије и времена:

$$[\hat{E}, \hat{t}]\psi = (\hat{E}\hat{t} - \hat{t}\hat{E})\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(t\psi) - ti\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = i\hbar\psi,$$

а отуда израз за комутатор

$$[\hat{E}, \hat{t}] = i\hbar. \tag{2.156}$$

Сада из (2.151) добијамо

$$\sqrt{\overline{(\Delta\hat{E})^2}} \cdot \sqrt{\overline{(\Delta\hat{t})^2}} \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{2.157}$$

тј. познате релације неодређености енергије и времена.

2.10.7 Остали примери

Веома занимљиво објашњење ове релације можете видети у популарном документарцу „Све и ништа“ професора Ал-Кхалилија[36]. Он узима две датотеке са једнаким бројем података, прву која представаља слику билијарског стола и другу са филмом на којем се те кугле котрљају. Прва је оштра слика велике резолуције непокретних кугли за које не видимо куда иду и са каквом енергијом, а друга је слика истих кугли у покрету али мале резолуције, мутна када је покушамо повећати.

Неодређеност (2.139) дозвољава *вакууму* да буде *динамична празнина.* У довољно кратким интервалима времена Δt у вакууму на случајан начин могу настати *виртуелне честице* енергије ΔE, под условом да је $\Delta E \Delta t < \hbar/2$, за које важе сви закони одржања. Појава тих честица је експериментално потврђена лелујањем стварних честица док пролазе вакуумом.

Јасно је да различити догађаји, A и B, могу али и не морају имати исте могућности, исте исходе. На пример: јуче сам се могао уписати на факултет, али данас је већ касно. Или, студенти Алиса и Бобан полагали су исти испит, али нису показали исто знање. Такође је јасно да се могућности истих догађаја мењају временом, са околностима, њиховим учињеним радњама.

Заједничке могућности датих догађаја су њихов пресек, $A \cap B$, а исходи рецимо немогући за A налазе се у скуповној разлици $B \backslash A$. Еволуцијама квантних стања, у складу са релацијама неодређености, мењају се и ове шансе. Јесте чудно али није даље од тога тврђење да преласком из прошлости ка будућности супстанца постаје мање информативна. Релације неодређености не говоре само о некомутативности промена, где ће „штета“ коју прави прва промена бити непоправљива за другу и обрнуто, него и о обртању тока промена. У редоследу A затим B неког догађаја јавља се вишак дејства у односу на редослед B затим A истог. У том смислу, релације неодређености су директна потврда принципа информације.

На страну остављам питање разрешења *парадокса информације*, да због начелног минимализма свет временом постаје све мање информативан. Сличан закључак следи и из спонтаног раста ентропије. То је онда у нескладу са законом одржања информације, осим ако прихватимо хипотезу да простор акумулира ту разлику. О томе сам писао раније и сада не бих понављао.

2.11 Комптоново одбијање

Комптонов ефекат је још једна потврда Хајзенбергових релација неодређености, он им је претходио. Али овде се нећемо бавити тим његовим аспектом него открићем да је светлост честичне природе, јер се фотонима одбијеним од електрона повећава таласна дужина према законима који би могли важити за билијарске кугле у судару. Подсећам,

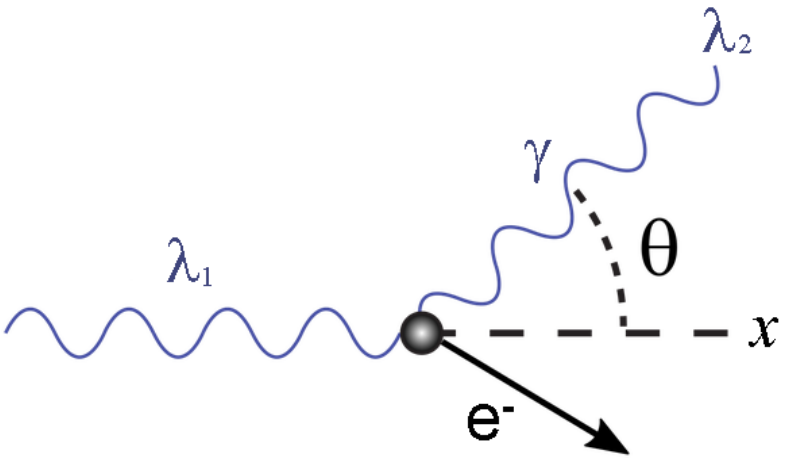
[36] Jim Al-Khalili, рођ. 1962. у Ираку, британски физичар.

одбијеним таласима упадни угао једнак је одбојном, а таласна дужина остаје иста, док се *преламање таласа* догађа кроз средине различитих брзина при чему им се таласне дужине мењају.

Негде почетком 1920-их када се на основу фотоелектричног ефекта још увек расправљало о таласима светлости и фотону, Комптон је дао јасан експериментални доказ „честичне природе“ тих таласа. Он је посматрао расипање γ-зрака из угљеникових електрона и нашао расуте γ-зраке са већим таласним дужинама од упадних, као на слици 2.11. Промена таласне дужине расте са углом расипања према Комптоновој формули

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta). \tag{2.158}$$

На левој страни једакости су λ_1 улазна и λ_2 излазна таласна дужина расутих фотона. Десно је $h \approx 6,626 \times 10^{-34}$ Js Планкова константа, $m_e \approx 9,109 \times 10^{-31}$ kg је *маса електрона* у мировању, $c \approx 3 \times 10^8$ m/s *брзина светлости* у вакууму, θ је *угао расипања*, количник $h/m_e c = 2,43 \times 10^{-12}$ m назива се Комптонова *таласна дужина* електрона.



Slika 2.11: Комптонов ефекат.

Комптон је обрадио и објаснио податке из свог експеримента, примењујући законе одржања енергије и импулса у интеракцијама фотона γ и електрона e^- и добио да расути фотон има мању енергију и већу таласну дужину према Планковој[37] формули

$$E = h\nu, \tag{2.159}$$

где је $\nu = c/\lambda$ фреквенција таласа. Ево таквог израчунавања.

Фотон γ са почетном енергијом $E_1 = h\nu_1$ путује дуж апсцисе (x-осе) и расипа се на електрону e^- енергије $E_e = m_e c^2$, као на слици 2.11. Фотон се одбија од електрона правцем који заклапа угао θ са апсцисом, одлазећи са енергијом $E_2 = h\nu_2$. Знамо да су таласна дужина λ и фреквенција ν фотона у релацији $\lambda\nu = c$. Енергија електрона у мировању је $E_{e1} = m_e c^2$, а након сударања $E_{e2} = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}$, где је $\vec{p}_e$ импулс електрона након судара.

Примењујемо *закон одржања* енергије и израчунавамо:

$$E_1 + E_{e1} = E_2 + E_{e2},$$

[37] Max Planck (1858-1947), немачки теоријски физичар.

$$E_1 + m_e c^2 = E_2 + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4},$$
$$(E_1 - E_2 + m_e c^2)^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4.$$

Примењујући закон одржања импулса добијамо:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e,$$
$$(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 = \vec{p}_e^2,$$
$$p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos\theta = p_e^2.$$

Множећи ову једнакост са c^2 и користећи релацију $E = pc$ за фотон, она постаје

$$E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos\theta = p_e^2 c^2.$$

Комбинујући овај резултат са претходним, налазимо:

$$E_1^2 + E_2^2 + m_e^2 c^4 + 2E_1 m_e c^2 - 2E_2 m_e c^2 - 2E_1 E_2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos\theta + m_e^2 c^4,$$
$$E_1 m_e c^2 - E_2 m_e c^2 - E_1 E_2 = -E_1 E_2 \cos\theta,$$
$$\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta),$$
$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta),$$

а то је формула (2.158). Из претходне добијамо и формулу за енергију расутог фотона

$$E_2 = \frac{E_1}{1 + \frac{E_1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}, \tag{2.160}$$

где је E_1 енергија упадног фотона. Како је $|\cos\theta| \leq 1$ то називник десно није мањи од један, па је $E_2 \leq E_1$, а једнакост се постиже само када нема расипања, $\theta = 0$.

Комптон[38] је за своје откриће 1927. године добио Нобелову награду у физици и то је сада класика. Оно што је мање познато је веза између таласне дужине, амплитуде и вероватноће, на коју овде (хипотетички) гледам на раније помињане и кориштене начине[39]. Начелно сматрам да фотон путује сопственом трајекторијом која му изгледа највероватнија, а да сударом са електроном фотон скреће на мање вероватну путању. Додатно, таласну дужину сматрам показатељем вероватноће трајекторије, на начин да већим таласним дужинама одговарају мање густине положаја фотона.

2.12 Експеримент „двоструки отвор“

На слици 2.12 је представљен експеримент „двоструки отвор“. Таласи (светлости) крећу са позиције O на зиду A, пролазе кроз два уска отвора I_1 и I_2 у препреци B и стижу на површину C која их региструје, формирајући временом дифракционе шаре D. Посматрамо једно место I на застору C и на том месту интерференцију два таласа I_1 и I_2.

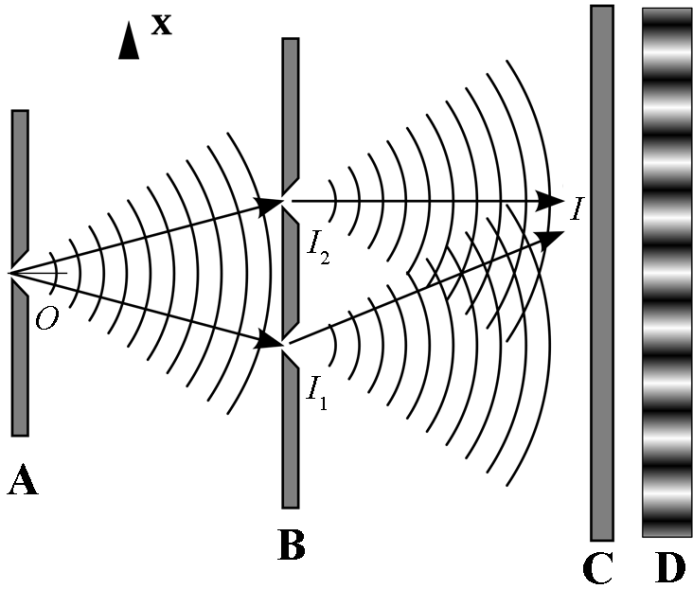
Када је један од два отвора затворен нема *интерференције*. Експеримент показује да таласи наилазе из O, пролазе кроз тај једини отвор I_i на препреци B и групишу се

[38] Arthur Compton (1892-1962), амерички физичар.
[39] в. у претходним књигама попут [3]

на застору C, најинтензивније на продору праве OI кроз раван C, постепено смањујући интензитет нагомилавања на даљим местима те равни. Класично објашњење било би да интерференције нема јер су за њу потребна бар два таласа, а новије је да су ово *таласи вероватноће*. Информатичко је да се зрака честица-таласа пролазећи кроз само један отвор изјашњава, губи део неизвесности и постаје мање „талас“ а више „честица“.

Ако су оба отвора I_1 и I_2 слободна, таласи OI_1 и OI_2 након проласка кроз B интерферирају и то се види у облику дифракционих трака D на детекционој плочи C. То се такође констатује у екперименту и објашњење је како у складу са класичном физиком, вероватноћама тако и са (мојом) теоријом информације.

Ствари постају чудне за класичну физику када пропуштамо једну по једну честицу-талас из O у правцу два отвора препреке B. Наиме, тада се такође временом на екрану C појављују дифракционе пруге D као да се догађају интерференције садашње честице-таласа са пријашњим сада непостојећим.



Slika 2.12: Експеримент „двоструки отвор“.

Класична физика такву аветињску интерференцију не може објаснити. Недавна квантна механика је објашњава расипањем „таласа вероватноће“ сваке поједине честице кроз два отвора и интерференцијом тих делова честице са самом собом. Дискутабилно је тада квантовање, па нудим још једно, информатичко објашњење. Простор је магацин прошлости, он је кондензатор садашњости. Свако место памти таласе који су њиме прошли и у садашњости се догађају одговарајуће интерференције.

Другим речима, таласи које на датом месту видимо сада интерференције су свих одговарајућих таласа који су у прошлости туда прошли, попут таласа на површини океана који су резултат и великих наслага воде испод. Овакав став се може правдати и ванвременским таласним функцијама.

Означимо са $A = A(I)$ амплитуду исхода, а са $A_1 = A(I_1)$ и $A_2 = A(I_2)$ амплитуде таласа који пролазе кроз наведене отворе. Квантна вероватноћа је, према Борновом закону, квадрат амплитуде $P(I) = |A|^2 = A^*A$, где је A^* конјугован комплексан број броја A. Означимо са $\Re(A), \Im(A) \in \mathbb{R}$ редом реални и имагинарни део комплексног

броја $A = \Re(A) + i\Im(A)$ ($i^2 = -1$), па проверимо:

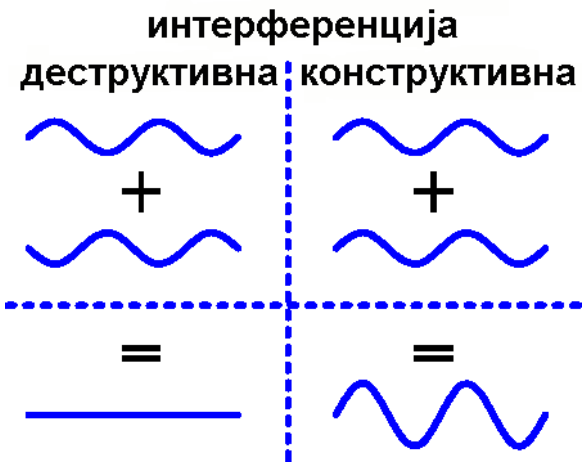
$$\begin{cases} P(I) = P(I_1 \cup I_2) = P(I_1) + P(I_2) - P(I_1 \cap I_2) \\ |A|^2 = |A_1 + A_2|^2 = (A_1 + A_2)^*(A_1 + A_2) = A_1^* A_1 + A_1^* A_2 + A_2^* A_1 + A_2^* A_2. \end{cases} \tag{2.161}$$

Доњи израз, $|A|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2\Re(A_1^* A_2)$, након упоређивања са горњим даје:

$$P(I) = |A|^2, \quad P(I_1) = |A_1|^2, \quad P(I_2) = |A_2|^2, \quad P(I_1 \cap I_2) = 2\Re(A_1^* A_2), \tag{2.162}$$

где је $\Re(A_1^* A_2) = \Re(A_1)\Re(A_2) + \Im(A_1)\Im(A_2)$. Како се амплитуде таласа пристиглих кроз отворе мењају зависно од положаја дуж површине C, тако се мења и реални део производа, а са њим и укупна вероватноћа стизања енергије на дато место мерне површине на претходној слици. То је експериментално проверен резултат.

На следећој слици 2.13 видимо шта се догађа када су амплитуде таласа супротне и када су сагласне. У првом случају (лево), реални и имагинарни делови амплитуда имају супротан знак, зато је $\Re(A_1^* A_2) < 0$ и вероватноће појаве на застору C се смањују. У другом случају (десно), реални и имагинарни делови амплитуда имају исти знак, $P(A_1^* A_2) > 0$, па се вероватноће на застору C повећавају. Отуда тамне и светле дифракционе пруге (D). Чудно је овде, када то упоредимо са горњим изразом (2.162), да вероватноћа удружених догађаја може бити већа од збира појединих.



Slika 2.13: Конструктивна и деструктивна интерференција.

Деструктивна и конструктивна фаза интерференције тракама D дифракције не би биле новост за класичну физику да није *синергије*, збира удружених већег од збира самих сабирака. То је необично у формулама (2.161) интерференције честица-таласа за експеримент „двоструки-отвор“. Та синергија додатно указује да још нешто „одоздо“ стиже горе на „површину“.

2.13 Квантна спрегнутост

Као и о претходним насловним темама раније сам и о *квантној спрегнутости* (енг. quantum entanglement) више писао тако да ћу овде само поентирати неколико места као допуну за популарни, први део ове књиге.

Квантна „заплетеност“ се дешава када систем више честица у квантној механици делује на такав начин да се честице не могу описати као независни системи већ само као

један систем у целини. Говоримо о случајним догађајима и зависним вероватноћама (енг. probability). Зависни догађаји су, на пример, олуја и полетања авиона са аеродрома, или извлачења карата из шпила без враћања. Поједини исходи расподеле вероватноће независни су, али је сваки од њих зависан од збирно свих осталих.

Пример 2.13.1. *Из стандардног шпила од 52 карте на случајан начин извлачи се једна карта (догађај A), а затим без враћања још једна (догађај B). Колика је вероватноћа да је прва карта „дама“ а друга „жандар“?*

Решење. $\Pr(A) = \frac{4}{52}$, $\Pr(B) = \frac{4}{51}$, $\Pr(A, B) = \frac{4\cdot 4}{52\cdot 51} = \frac{4}{663}$. □

За разлику од низања догађаја, *производ догађаја* (пресек скупова) је догађај који ће се десити акко[40] се деси сваки од њих. Рецимо, ако је A догађај да је извучена карта „ас“, а B је догађај да је извучена карта „пик“, онда је AB догађај да је извучена карта „пик ас“. Са $n(X)$ означавамо релативну учесталост догађаја X у $n \in \mathbb{N}$ понављања случајног опита.

За број $\Pr(B|A)$, који називамо *условном вероватноћом* догађаја B уз услов A, ако се пре B десило A, тада важе једнакости:

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(AB)}{\Pr(A)} = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{\frac{n(AB)}{n}}{\frac{n(A)}{n}}, \tag{2.163}$$

када је $\Pr(A) > 0$. Из комутативности $AB = BA$ следи

$$\Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B|A) = \Pr(B)\Pr(A|B). \tag{2.164}$$

Дисјунктни догађаји A и B су они чији производ је празан скуп ($AB = \varnothing$).

Сматрамо да постоје непразни догађаји $X \neq \varnothing$ који су (у датим околностима) немогући $\Pr(X) = 0$, да из $\Pr(\varnothing) = 0$ не следи нужно $X = \varnothing$. Комплемент догађаја A је догађај A' који ће се десити акко се A неће десити. Комплемент немогућег је сигуран догађај ($\varnothing' = \Omega$); немогућ догађај има вероватноћу 0, сигуран 1.

Збир догађаја (унија скупова) је догађај који ће се десити акко се деси бар један од њих. Ако је A догађај да је извучена карта „ас“, а B је догађај да је извучена карта „пик“, онда је $A + B$ догађај да је извучена карта било који од четири „аса“, или било која од 13 карата „пик“, што је укупно 16 од 52.

Разбијањем сигурног догађаја Ω на низ дисјунктних догађаја $A_1, A_2, \ldots, A_n$ добијамо формулу *потпуне вероватноће*

$$\Pr(B) = \sum_{k=1}^{n} \Pr(A_k)\Pr(B|A_k). \tag{2.165}$$

Наиме, резултат следи из $B = \sum_{k=1}^{n} A_k B$, одакле је $\Pr(B) = \sum_{k=1}^{n} \Pr(A_k B)$, па стављајући $\Pr(A_k B) = \Pr(A_k)\Pr(B|A_k)$.

Отуда *Бајесова формула*: ако догађаји $A_1, A_2, \ldots, A_n$ чине једно разбијање од Ω

$$\Pr(A_l|B) = \frac{\Pr(A_l)\Pr(B|A_l)}{\sum_{k=1}^{n} \Pr(A_k)\Pr(B|A_k)}, \quad l = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.166}$$

[40] акко – ако и само ако

Наиме, из $\Pr(A_l B) = \Pr(B)\Pr(A_l|B) = \Pr(A_l)\Pr(B|A_l)$ следи

$$\Pr(A_l|B) = \frac{\Pr(A_l)\Pr(B|A_l)}{\Pr(B)}$$

и замењујући $\Pr(B)$ формулом потпуне вероватноће добијамо тражени резултат.

Догађај B је *независан* од догађаја A у смислу теорије вероватноће акко је

$$\Pr(B|A) = \Pr(B). \tag{2.167}$$

Независне догађаје можемо једнако дефинисати и са $\Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B)$.

Пример 2.13.2. *Из шпила од 32 карте случајно се извлачи једна. Да ли су догађаји: A извучен је „пик“ и догађај B извучена је „дама“ независни?*

Решење. Није очигледно[41], па израчунавамо:

$$\Pr(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad \Pr(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, \quad \Pr(AB) = \frac{1}{32},$$

$$\Pr(A)\cdot\Pr(B) = \Pr(AB).$$

Дакле, догађаји A и B јесу независни у смислу горње дефиниције. □

Пример 2.13.3. *Правилан тетраедар има једну страну обојену плаво, другу жуто, трећу црвено а четврту са све три боје. Тетраедар се баца и региструје се боја на страни на коју је пао. Нека је догађај: A да падне плава боја, B жута, C црвена. Проверити независност.*

Решење. Лако налазимо:

$$\Pr(A) = \Pr(B) = \Pr(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \Pr(AB) = \Pr(BC) = \Pr(CA) = \frac{1}{4},$$

$$\Pr(A)\Pr(B) = \Pr(AB), \quad \Pr(B)\Pr(C) = \Pr(BC), \quad \Pr(C)\Pr(A) = \Pr(CA),$$

$$\Pr(A)\Pr(B)\Pr(C) \neq \Pr(ABC).$$

Догађаји A, B и C нису независни, иако јесу независни узимани по два. □

Овај пример показује да догађаји независни у паровима не морају бити независни у смислу математичке дефиниције. Слично је са на почетку поменутом дистрибуцијом вероватноћа чији поједини догађаји јесу независни у паровима али нису независни у смислу наше дефиниције. То је важно запажање, иако је независност дефинисана на „очигледан“ и интуитивно прихватљив начин (2.167), она нас брзо води у интуитивно тешко схватљиве резултате.

Отуда и тешкоће са квантном спрегнутошћу, јер она се појављује са зависним случајним догађајима. У књизи „Физичка информација“ [2] демонстрирано је како Шенонова дефиниција информације подбацује у процени физичке информације, управо због тог вишка сигурности, односно дефицита информације који настаје из притајене зависности догађаја расподеле вероватноћа, због чега се у одговарајућим квантним појавама јавља „вишак дејства“.

[41] Примери из [19].

Ајнштајнов чувени пример са *паром рукавица*, дакле „левом“ и „десном“, у две веома удаљене кутије, од којих ближу отварамо и налазимо да је рецимо „лева“. Тада разумемо да се у оној далекој кутији налази „десна“. То су зависни догађаји и „вишак дејства“, где ово дејства цитирам, јер га нема. Свака информација је неко дејство и нема дејства ако нема информације.

Ако нешто сигурно знамо, вероватноћа догађаја је 1, а информација је 0. Отварањем прве кутије потрошена је сва неизвесност, добијена је сва информација и извршено је сво могуће дејство, а евентуални проблем је само у тешкоћама наше интуиције да прихвати ову *не локалност*, тачније речено зависност случајних догађаја.

Посебна врста зависних догађаја, па према томе и спрегнутих квантних система, је *информација перцепције* у случају физичке супстанце. Тада важи веома захтеван принцип најмањег дејства, што значи да деловање на један од вектора (интелигенције и хијерархије) проузрокује подешавање оног другог тако да њихов скаларни производ остане минималан.

2.14 Антикомутативност

Једно *антисиметрично* двочестично стање $\hat{A}(x,y)$ у квантној механици представља се као збир стања у којима је једна честица у стању $|x\rangle$ а друга у стању $|y\rangle$, тако да

$$|\psi\rangle = \sum_{x,y} \hat{A}(x,y)|x,y\rangle, \tag{2.168}$$

и $\hat{A}(y,x) = -\hat{A}(x,y)$. Отуда, ако $x = y$, онда $\hat{A}(x,y) = 0$, што је Паулијево искључење[42].

Ту антисиметрију такође називамо и *антикомутативност*. Размотримо је на атому хелијума на слици 2.14. Електрони 1 и 2 су у стањима a и b редом, а таласна функција за поједине електроне $\psi_1(a)$ и $\psi_2(b)$.

Вероватноћа (густина) амплитуде да је електрон 1 или 2 у стању a или b је редом $\|\psi_1^*(a)\psi_1(a)\|$ или $\|\psi_2^*(b)\psi_2(b)\|$. Али вероватноћа амплитуде да је електрон 1 у стању a и (конјукција) електрон 2 у стању b је

$$\psi = \psi_1(a)\psi_2(b). \tag{2.169}$$

Таласну функцију стања са оба стања a и b заузета електронима можемо писати

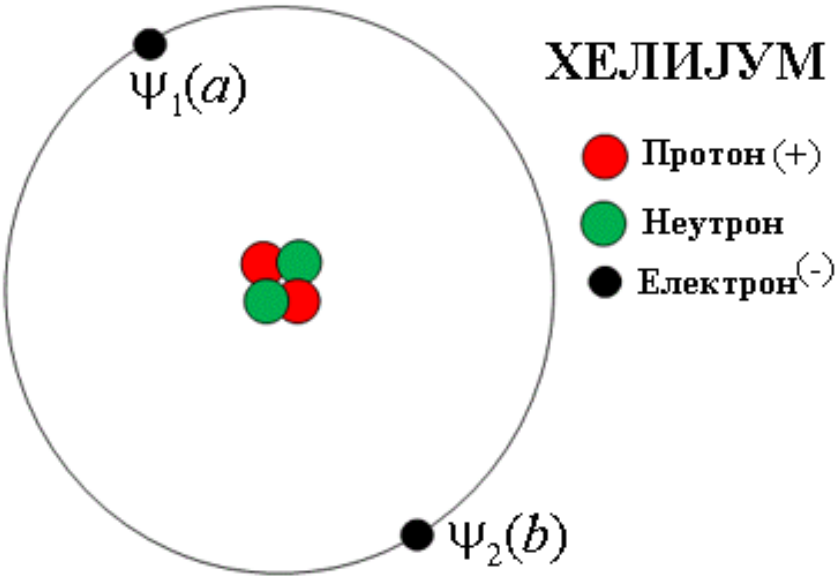
$$\psi(a,b) = \psi_1(a)\psi_2(b) - \psi_1(b)\psi_2(a). \tag{2.170}$$

Видимо да је $\psi(b,a) = -\psi(a,b)$, што је антисиметрија или антикомутативност.

Пошто су електрони фермиони, знак између (2.170) је минус. У случају бозона уместо минуса стајао би плус и имали бисмо симетрију или комутативност. У случају фермиона имамо искључење Паулија, у случају бозона не.

Упоређујући ово са информацијом перцепције узимамо да су њени сабирци (2.169) неке информације и да су такви еквиваленти логаритма вероватноће, односно да је вероватноћа експонент информације. На тај начин стање (2.169) видимо као производ експонената информација електрона 1 у стању a и електрона 2 у стању b. Због антикомутативности (2.170) информација електрона је мања, а због принципа минимализма они остају заробљени у том стању.

[42] в. [15]



Slika 2.14: Атом хелијума има два електрона.

2.14.1 Паулијеве матрице

Паулијеве матрице још увек представљају најпознатије антисиметричне квантне процесе, па их зато посебно наводим:

$$\hat{\sigma_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma_y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.171}$$

Овде су већ помињане (2.131) у мало другачијем контексту, а сада обратимо пажњу на антисиметричност прве две и траг (збир дијагоналних коефицијената) треће:

$$\hat{\sigma_x}\hat{\sigma_y} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = -\hat{\sigma_y}\hat{\sigma_x}, \quad \mathrm{Tr}[\hat{\sigma_z}] = 0.$$

Зато су било које две од њих три антикомутативне и могу представљати елементарне фермионе.

Ове три матрице су *инволутивне*, $f(f(x)) = x$, или

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}.$$

Сопствене вредности (енг. eigenvalues) сваке од Паулијевих матрица су ± 1. Одговарајући нормирани сопствени вектори (енг. eigenvector) су:

$$\hat{\psi}_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\psi}_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

$$\hat{\psi}_{z+} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_{z-} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Приметимо да је сваки од ова три вектора *јединични вектор.* На пример, за први важи $\|\vec{\psi}_{x+}\|^2 = \frac{1}{2}(1+1) = 1$.

Такође имамо Паулијеве *ротиране матрице*, дефинисане помоћу било која три јединична вектора $\vec{n}$ у правцу (θ, ϕ) поларног система $O\theta\phi$. Писано коваријантно, за јединични вектор $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ због $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$ важи

$$\vec{u} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta). \tag{2.172}$$

Унутрашњи (скаларни) производ са контраваријантним вектором матрице $\vec{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)^\tau$ је

$$\vec{u}\cdot\vec{\sigma} = \hat{\sigma}_x \sin\theta\cos\phi + \hat{\sigma}_y \sin\theta\cos\phi + \hat{\sigma}_z\cos\theta.$$

Одузимајући матрице, након сабирања добијамо

$$\vec{u}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix}\cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta\\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}. \tag{2.173}$$

Приметимо

$$\begin{aligned} e^{\pm i\phi}\sin\theta &= (\cos\phi \pm i\sin\phi)\sin\theta \\ &= \cos\phi\sin\theta \pm i\sin\phi\sin\theta \\ &= u_x \pm iu_y. \end{aligned}$$

Отуда

$$\vec{u}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix}n_z & n_x - in_y\\ n_x + in_y & -n_z\end{pmatrix}. \tag{2.174}$$

Спин мора бити сопствено стање (енг. eigenstate) ротиране Паулијеве матрице $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$ са јединичном сопственом вредношћу:

$$\begin{pmatrix}n_z & n_x - in_y\\ n_x + in_y & -n_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}.$$

Множењем и уређивањем система добијамо:

$$\begin{cases} n_z\xi_1 + n_x\xi_2 - in_y\xi_2 = \xi_1 \\ n_x\xi_1 + in_y\xi_1 - n_z\xi_2 = \xi_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (n_z - 1)\xi_1 + (n_x - in_y)\xi_2 = 0 \\ (n_x + in_y)\xi_1 - (n_z + 1)\xi_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\cos\theta - 1)\xi_1 + (e^{-i\phi}\sin\theta)\xi_2 = 0 \\ (e^{+i\phi}\sin\theta)\xi_1 - (\cos\theta + 1)\xi_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2\sin^2\frac{\theta}{2})\xi_1 + (e^{-i\phi}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})\xi_2 = 0 \\ (e^{+i\phi}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})\xi_1 - (2\cos^2\frac{\theta}{2})\xi_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\sin\frac{\theta}{2})\xi_1 + (e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2})\xi_2 = 0 \\ (e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2})\xi_1 - (\cos\frac{\theta}{2})\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Ово је зависан сагласан (конзистентан) линеарни систем са две једначине и две комплексне променљиве ξ_1 and ξ_2. Он има бесконачно решења.

Узмимо произвољан комплексан број $\xi_1 \in \mathbb{C}$ и израчунајмо $\xi_2 = e^{i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \xi_1$ са условом $\|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2 = 1$. Опште решење је

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}. \tag{2.175}$$

То је сопствени вектор ротиране Паулијеве матрице (2.174) коме одговара сопствена вредност 1.

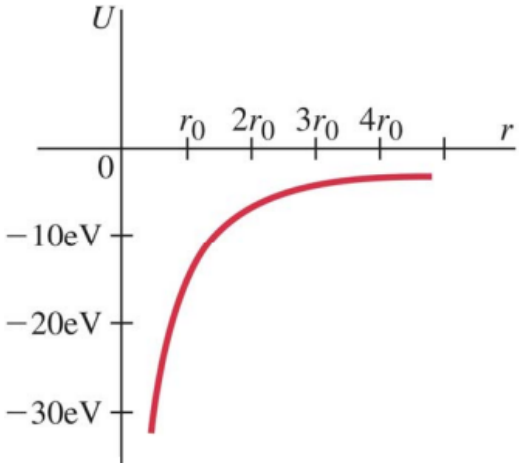
Приметимо да 2π ротација даје $\vec{\psi} \to -\vec{\psi}$. Да би се спин вратио на почетну вредност неопходна су два пуна окрета вектора (2.174). Тек након двоструке пуне ротације, за угао 4π, спин постаје исти као на почетку. То симулирамо примерима попут Диракове траке[43], а њено дубље значење је у способности фермиона да имају *античестице*. Бозони, напротив, немају античестице, па за, на пример, фотон кажемо да је сам себи и честица и античестица.

2.15 Решавање атома водоника

Најједноставнији физички систем који садржи интеракције потенцијала (није изолована честица) је *атом водоника* који ћемо сада размотрити као решења Шредингерове једначине (2.100). Један протон, један електрон и електростатички *Кулонов потенцијал* који их држи заједно

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{2.176}$$

који је привлачни потенцијал између набоја $+e$ и $-e$ на међусобној удаљености r.



Slika 2.15: Кулонов потенцијал.

Трансформацијама координата између Декартовог $Oxyz$ и *сферног* система $Or\theta\phi$ координата добијамо *Шредингерову једначину* у Декартовим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0, \tag{2.177}$$

[43] Dirac's belt: `https://vimeo.com/62228139`

и сферним координатама

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0. \tag{2.178}$$

Када укључимо Кулонов потенцијал и помножимо обе стране ове једнакости са $r^2\sin^2\theta$, добијамо

$$\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{2mr^2\sin^2\theta}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}+E\right)\psi=0. \tag{2.179}$$

Решење ове једначине је таласна функција ψ за електрон у атому водоника. Ако нађемо то решење, у принципу, сазнаћемо све што треба о водониковом атому.

Једначине попут горње решавају се, поред осталих начина, *сепарацијом варијабли*, тј. раздвајањем у различите делове са по једном променљивом у сваком делу. Са тим циљем пишемо

$$\psi=\psi(r,\theta,\phi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)=R\Theta\Phi. \tag{2.180}$$

Затим посматрамо изводе:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\Theta\Phi\frac{dR}{dr},\quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta}=R\Phi\frac{d\Theta}{d\theta},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}=R\Theta\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}, \tag{2.181}$$

где су парцијални изводи постали пуни изводи, јер функције R,Θ,Φ зависе само од r,θ,ϕ редом. Ово смењујемо у претходну.

Смена $\psi=R\Theta\Phi$ у Шредингерову једначину и дељење са $R\Theta\Phi$ даје

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\frac{2mr^2\sin^2\theta}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}+E\right)=0. \tag{2.182}$$

Одвојена је варијабла ϕ тако да је израз

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

функција само ϕ. Преместимо то на десну страну једначине, добијамо

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{2mr^2\sin^2\theta}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}+E\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}. \tag{2.183}$$

Једначина постаје облика $f(r,\theta)=g(\phi)$, где је f функција само r и θ, а g функција само варијабле ϕ. То је могуће само у случају $f(r,\theta)=\text{const}$, дакле да је функција f константа, односно да је независна од r и θ. Зато пишемо

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=m_l^2, \tag{2.184}$$

а смисао константе m_l видети ћемо убрзо.

Поделимо једначину (2.183) са $\sin^2\theta$, добићемо

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}+E\right)=\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right), \tag{2.185}$$

па опет имамо раздвојене променљиве. На левој страни једнакости је функција само r, а на десној је функција самог θ. То је могуће само ако су на свакој од страна једнакости константе, а у овом случају ту константу ћемо означити са $l(l+1)$.

Тако смо дошли до три диференцијалне једначине:

$$\begin{cases} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m_l^2\Phi = 0 \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m_l^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \\ \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + E\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0. \end{cases} \tag{2.186}$$

Уместо једне велике парцијалне диференцијалне једначине (2.182) са три променљиве, имамо три једноставније диференцијалне једначине са по једном променљивом.

Квантни бројеви су константе које дефинишу решења Шредингерове једначине. У случају прве једначине (2.186) имамо

$$\Phi(\phi) = Ae^{im_l\phi}, \tag{2.187}$$

где је A константа нормирања. Како ϕ и $\phi + 2\pi$ представљају једну тачку у простору, биће

$$Ae^{im_l\phi} = Ae^{im_l(\phi+2\pi)},$$

што је тачно једино за $m_l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, а због разлога који у овом тренутку још увек нису видљиви, m_l називамо *магнетни квантни број*.

Друга једначина (2.186) је по θ. Она укључује члан

$$l(l+1) - \frac{m_l^2}{\sin^2\theta}, \tag{2.188}$$

и показује се да она може бити решена само када је l цели број већи или једнак m_l. Тако налазимо *орбитни квантни број* l, са ограничењем $m_l = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l$.

Трећа једначина (2.186) је радијална, њена решења су функције променљиве r. Она може бити решена само за енергије E које задовољавају неке услове које познајемо још из *Боровог*[44] модела атома

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2 n^2 \varepsilon_0 \hbar^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.189}$$

Ово n назива се *главни квантни број*. У тој трећој једначини се појављује производ $l(l+1)$. Из теорије диференцијалних једначина произилази да се решење R може наћи само у случају да је n веће или једнако од броја $l+1$, другим речима, када је испуњен услов $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Тако комплетирамо стања водониковог атома.

Дакле, решења Шредингерове једначине (2.179) за атом водоника морају бити облика (2.180), са наведеним особинама квантних бројева n, l и m_l. Првих неколико нормираних тих решења, таласних функција водониковог атома, дато је у табели 2.1. Константа $a_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/mc^2 = 5,292 \times 10^{-11}$ m је радијус унутрашње Борове орбите. На пример, за квантни број $n = 3$ који одговара другом побуђеном стању Боровог атома водоника и орбитном и магнетном броју $l = 2$ и $m_l = -1$, имаћемо нормирана решења:

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\phi}, \quad \Theta(\theta) = \frac{\sqrt{15}}{2}\sin\theta\cos\theta, \quad R(r) = \frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}}\frac{r^2}{a_0^2}e^{-r/3a_0}, \tag{2.190}$$

[44] Niels Bohr (1885-1962), дански физичар.

n	l	m_l	$\psi(r,\theta,\phi)$
1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$
2	0	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}a_0^{3/2}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0}$
2	1	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}a_0^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}\cos\theta$
2	1	±1	$\frac{1}{8\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$
3	0	0	$\frac{1}{81\sqrt{3\pi}a_0^{3/2}}\left(27-18\frac{r}{a_0}+2\frac{r^2}{a_0^2}\right)e^{-r/3a_0}$
3	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\frac{r}{a_0}e^{-r/3a_0}\cos\theta$
3	1	±1	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\frac{r}{a_0}e^{-r/3a_0}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$
3	2	0	$\frac{1}{81\sqrt{6\pi}a_0^{3/2}}\frac{r^2}{a_0^2}e^{-r/3a_0}(3\cos^2\theta-1)$
3	2	±1	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\frac{r^2}{a_0^2}e^{-r/3a_0}\sin\theta\cos\theta\, e^{\pm i\phi}$
3	2	±2	$\frac{1}{162\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\frac{r^2}{a_0^2}e^{-r/3a_0}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi}$

Tabela 2.1: Стања водониковог атома.

а ψ је производ ове три. То је претпоследњи ред табеле.

Главни квантни број n зависи од енергије електрона и показује се да је једнак претходно познатом из Боровог модела атома. Та једнакост долази из таласне природе електрона, али са додатним детаљима које нам доноси квантно решење. Знало се да су енергије електрона у атому водоника квантоване и да имају негативне бројеве, али сада знамо да и позитивне енергије могу бити решења Шредингерове једначине, тада за слободне електроне.

Диференцијална једначина за $R(r)$ се може писати

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[K_r+K_o-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right]R=0, \tag{2.191}$$

где су K_r и K_o кинетичка радијална и орбитална енергија, при чему је укупна кинетичка енергија $K = K_r + K_o$, а укупна енергија $E = K + U$, са Кулоновом потенцијалном енергијом (2.176). Ова, кинетичка енергија је увек позитивна. Кинетичке енергије је згодно раздвајајти на K_r и K_o, јер ако радијална једначина има само радијалну зависност, онда је члан са орбиталном кинетичком енергијом занемарив.

Избацивање орбиталне кинетичке енергије из једначине постижемо са

$$K_o=\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}. \tag{2.192}$$

Знамо да је $K_o = \frac{1}{2}mv_o^2$, где је v_o орбитална брзина (тангентна), а да је орбитални угловни моменат $L = mv_o r$, а отуда $K_o = L^2/(2mr^2)$. Комбинујући претходне, налазимо $L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar$, па како је број $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, дакле квантован, то је и L квантован. Најнижа могућа ненулта вредност је $L = \sqrt{2}\,\hbar$. Ознаке за l су у табели:

$$l=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \mathrm{s} & \mathrm{p} & \mathrm{d} & \mathrm{f} & \mathrm{g} & \mathrm{h} & \mathrm{i}\end{pmatrix}. \tag{2.193}$$

Тако, електрон са бројевима $n = 3$, $l = 2$ био би 3d електрон. Он је 3d са било којим од неколико дозвољених бројева m_l. Још нека стања су у табели 2.2.

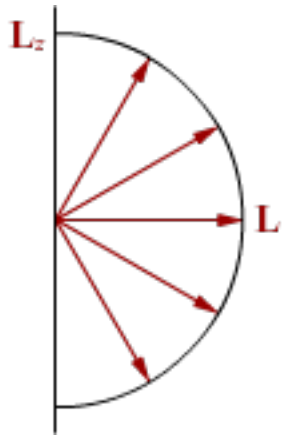
	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$n = 1$	1s					
$n = 2$	2s	2p				
$n = 3$	3s	3p	3d			
$n = 4$	4s	4p	4d	4f		
$n = 5$	5s	5p	5d	5f	5g	
$n = 6$	6s	6p	6d	6f	6g	6h

Tabela 2.2: Стања електрона у атому.

Електрон у атому водоника је у орбити. Он има свој угаони моменат $\mathbf{L}$, вектор чији интензитет је $\sqrt{l(l+1)}\,\hbar$ и смер који нам и не казује много. Електрон у орбити, попут кружне струје, производи магнетно поље које може да интерагује са вањским магнетним пољима. Према томе, вањско поље нам даје потврду правца и смера вектора орбиталног угловног момента у атому водоника. По договору, постављамо z-осу дуж правца магнетног поља $\mathbf{B}$. Тада m_l даје компоненту $\mathbf{L}$ у правцу $\mathbf{B}$

$$L_z = m_l \hbar, \tag{2.194}$$

при чему је m_l највише једнако l, па је L_z увек мање од L. То је наизглед „чудна“ ствар у квантној механици, која такође има свој смисао.



Slika 2.16: Магнетни момент.

На слици 2.16 видимо, ако L показује „тачно“ у смеру z-осе (магнетне осе) онда орбита електрона лежи „тачно“ у Oxy равни, па је неодређеност момента у правцу z-осе „бесконачна“. Како је ово немогуће, за електрон у атому, отклањања од z-осе су стално присутна. Ето зашто је L_z углавном мање од L.

Након растављања таласне функције на факторе (2.180) раздвајајући променљиве и посебних решавања Шредингерове једначине у сферним координатама, *густину вероватноће* дефинишемо са

$$\Pr(r, \theta, \phi) = \psi^* \psi dV = \Pr(r) \Pr(\theta) \Pr(\phi) dV, \tag{2.195}$$

где је $\Pr(\omega)$ вероватноћа исхода ω, а dV је инфинитезимални елеменат запремине у сферним координатама

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi. \tag{2.196}$$

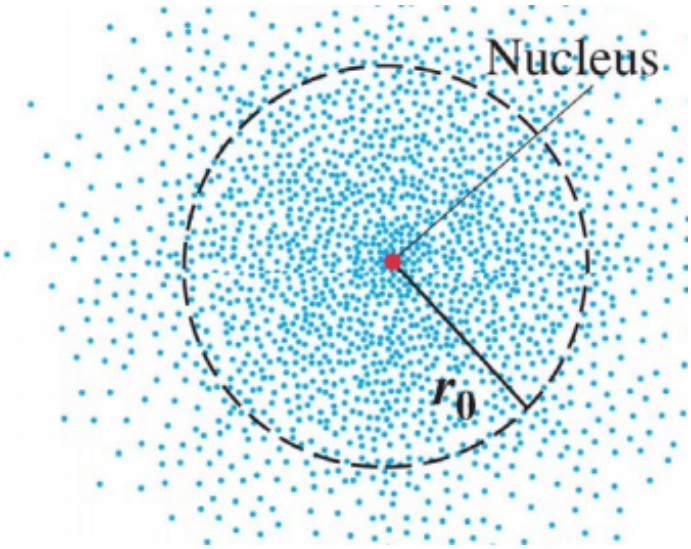
Зато што су променљиве раздвојене, а функције R, Θ и Φ ортонормиране, интеграле густина вероватноћа можемо посматрати као троструки интеграл, односно као производ три једно-димензионална интеграла. Производ тих интеграла такође је нормиран на јединицу, а посебни интеграли су:

$$\begin{cases} \Pr(r) = \int R^*(r)R(r)r^2 \, dR, \\ \Pr(\theta) = \int \Theta^*(\theta)\Theta(\theta)\sin\theta \, d\theta, \\ \Pr(\phi) = \int \Phi^*(\phi)\Phi(\phi) \, d\phi. \end{cases} \tag{2.197}$$

Максимална вероватноћа јавља се у врховима језгра вероватноће, тамо где су густине вероватноћа највеће.

Просечна вредност, рецимо r_0, једнака је очекиваној вредности $\bar{r}$. Највероватнија вредност r за 1s електрон је $r_0 = a_0$, што и треба да буде, али просечна вредност r је $\bar{r} = 1,5a_0$, што је у реду у квантној теорији али не и у ранијем моделу.

Квантна механика је донела и друге корекције претходног гледања на атом. На пример, имамо само вероватноће налажења електрона помоћу датог система координата. Електрон се не креће око језгра атома у било којем конвенционалном смислу. На нејасном облаку на слици 2.17 нису приказани електрони у језгру (енг. Nucleus) атома, већ густине вероватноће налажења јединог електрона прве орбите. Што је облак гушћи на неком месту слике, вероватније је налажење електрона на том месту.



Slika 2.17: Густина вероватноће електрона.

Репрезентација Хилбертове алгебре је квантни систем, њени вектори су квантна стања, а линеарни унитарни оператори су квантни процеси, еволуције квантних стања. На крају, квантна стања увек су неке честице просто зато што је „свако својство информације дискретно“. Али како сами поменути оператори векторског простора чине нови векторски простор, *дуалан простор* са првим, то су онда и квантни процеси неке „честице“ које се подвргавају опет истим квантним законима.

Да ствари буду још запетљаније, експоненцијалне и логаритамске функције вектора такође су вектори. То нас збуњује када пређемо са вероватноћа, таласних функција квантних стања у уобичајеном смислу, на логаритме, тада *информације перцепције*, или обрнуто, када са информација прелазимо на њихове експоненцијалне функције које поново постају вероватноће, односно „класична“ квантна стања.

Glava 3

Додатак

Рецензије су трајале од 28. јануара до 16. јуна 2020. године од мојих колега и колегиница из Гимназије Бања Лука наведених на почетку књиге. Они су најбољи а тренутно можда и једини прави познаваоци онога о чему пишем и њихов избор био је зато изнуђен и једноставан. Поред увиђања превида и лапсуса ради исправки на крају, које сам не бих могао, њихова помоћ знала је бити и у потицајима или инспирацији током писања текста. Биће вам јасније на шта мислим када прочитате прилоге Д. Милинчића и А. Радић.

3.1 O informaciji i vremenu (ili Da li vrijeme zaista teče?)

Inspirisano knjigama Rastka Vukovića i člankom u časopisu Quanta o još jednom tragaocu za istinom, N. Žizenu, koji istinu traži na drugačiji način.

Iz fizičkih zakona slijedi da je protok vremena iluzija. Da bismo izbjegli ovakav zaključak morali bismo ponovo razmotriti realnost brojeva beskonačne tačnosti. Ako brojevi ne mogu imati beskonačan niz decimala, tada ni budućnost nikada neće biti unaprijed predodređena.

Vjerovatno su mnogi ponekad pomislili na ovo: iako imamo osjećaj da prolazimo kroz vrijeme nalazeći se na tankoj oštrici između fiksirane prošlosti i otvorene budućnosti, same te oštrice (koju zovemo sadašnjost) nema nigdje u postojećim zakonima fizike.

U Ajnštajnovoj teoriji relativnosti, na primjer, vrijeme je utkano zajedno sa tri dimenzije prostora, čineći savitljivi 4-dimenzionalni prostorno-vremenski kontinuum, tzv. "blok univerzum" koji obuhvata čitavu prošlost, sadašnjost i budućnost. Ajnštajnove jednačine opisuju sve u blok univerzumu onako kako je postavljeno na samom početku. Početni uslovi kosmosa određuju šta dolazi kasnije i tu nema iznenađenja. Odnosno, može samo da izgleda kao da ih ima. Ajnštajn je samo nekoliko nedjelja prije smrti 1955 godine napisao: "Za nas vjerujuće fizičare, distinkcija između prošlosti, sadašnjosti i budućnosti je samo jedna tvrdoglavo uporna iluzija".

Taj bezvremenski, predeterminisani pogled na realnost koji je imao Ajnštajn ostao je popularan do danas. Ipak, Marina Kortes (Marina Cortês), kosmolog sa univerziteta u Lisabonu kaže ovako: "Većina fizičara vjeruje u blok univerzum, zato što ga predviđa opšta relativnost. Međutim, ako od nekoga zatražite da malo dublje objasni šta znači blok univerzum, on počinje da se preispituje i koleba oko njegovih implikacija".

Fizičari koji dublje razmišljaju o vremenu ukazuju na teškoće koje proističu iz zakona kvantne mehanike koji opisuju probabilističko ponašanje čestica. Na kvantnom nivou se dešavaju ireverzibilne promjene koje razdvajaju prošlost od budućnosti. Naime, jedna čestica

zadržava simultana kvantna stanja sve dok je ne izmjerimo, nakon čega ta čestica "usvaja" jedno od stanja. Ono što izgleda misteriozno, ishodi pojedinačnih mjerenja su slučajni i nepredvidivi, dok kolektivno ponašanje čestica slijedi statističke obrasce. Ova očigledna nekonsistentnost između prirode vremena u kvantnoj mehanici i načina na koje vrijeme funkcioniše u relativnosti stvara nesigurnost i konfuziju.

Tokom protekle godine, švajcarski fizičar Nikola Žizen (Nicolas Gisin, rođen 1952 godine u Ženevi, detaljnije informacije o njegovom životu i radu se mogu naći na Wikipediji) je objavio četiri rada u kojima je pokušao da "rastjera maglu" koja okružuje vrijeme u fizici. Po Žizenovom viđenju, problem je sve vrijeme bio matematički. Žizen tvrdi da se vrijeme uopšte i ono vrijeme koje zovemo sadašnjost, lako mogu izraziti u već sto godina starom matematičkom jeziku koji se naziva intuicionistička matematika, koji odbacuje postojanje brojeva sa beskonačno mnogo decimala (ili cifara). Kada se za opisivanje evolucije fizičkih sistema koristi intuicionistička matematika, postaje jasno, prema Žizenu, da "vrijeme zaista protiče i nova informacija se stvara". Pored toga, sa ovim formalizmom, striktni determinizam koji slijedi iz Ajnštajnovih jednačina ustupa mjesto nepredvidivosti koja podsjeća na kvantnu. Ako su brojevi konačni i ograničeni u svojoj tačnosti, tada je i sama priroda inherentno neprecizna i stoga nepredvidiva.

Fizičari još uvijek pokušavaju da "svare" Žizenov rad (ne dešava se često da neko pokuša da preformuliše zakone fizike u novom matematičkom jeziku) ali mnogi od onih koji su proučavali njegove argumente misle da oni mogu da potencijalno premoste konceptualnu podjelu između determinizma opšte relativnosti i inherentne slučajnosti na kvantnom nivou.

Nikol Junger Halpern (Nicole Yunger Halpern) sa univerziteta Harvard koja se bavi kvantnim informacijama, odgovarajući na Žizenov članak u časopisu *Nature Physics* kaže: "Mislim da je ovo intrigantno. Spremna sam da dam šansu intuicionističkoj matematici".

Ranije pomenuta Marina Kortes naziva Žizenov pristup "krajnje interesantnim" i "šokantnim i provokativnim" po svojim implikacijama. Ona kaže da je "ovo zaista vrlo interesantan formalizam koji pristupa problemu konačne tačnosti u prirodi".

Žizen kaže da je važno da se formulišu zakoni fizike koji određuju budućnost kao otvorenu i sadašnjost kao vrlo stvarnu, zato što je to iskustvo svih nas. On dalje kaže: "Ja sam fizičar sa nogama čvrsto na zemlji. Vrijeme protiče, to svi znamo".

3.1.1 Informacija i vrijeme

Žizen je prvenstveno eksperimentalni fizičar. On vodi laboratoriju na univerzitetu u Ženevi koja je izvela neke ključne eksperimente u kvantnim komunikacijama i kvantnoj kriptografiji. Ali on je i jedan od rijetkih svestranih fizičara koji je poznat i po važnim teorijskim uvidima, posebno onim koji se tiču kvantne slučajnosti i nelokalnosti.

Kako je jednom izjavio, prije oko dve i po godine je došao do zaključka da deterministička slika vremena u Ajnštajnovoj teoriji i ostatku "klasične" fizike implicitno pretpostavlja postojanje beskonačne informacije. Razmotrimo vrijeme ali u meteorološkom smislu (što bi se na engleskom reklo weather). Zato što je haotično, ili visoko osjetljivo na male promjene, ne možemo predvidjeti egzaktno kakvo će vrijeme biti nedjelju dana od danas. Ali zato što je to klasični sistem, udžbenici će nam reći da bismo mogli, u principu, predvidjeti vrijeme nedjelju dana unaprijed, ako bismo samo mogli izmjeriti svaki oblak, nalet vjetra i zamah leptirovih krila dovoljno precizno. Naša je krivica što ne možemo izmjeriti i procijeniti te uslove detaljno, sa dovoljno decimalnih cifara da bismo ekstrapolirali unaprijed i došli do savršeno tačne prognoze, jer se stvarna fizika vremena (meteorološkog) odvija poput sata.

A sada proširimo ovu ideju na čitav univerzum. U predeterminisanom svijetu u kojem

vrijeme samo izgleda kao da se odvija, ono što će se egzaktno dešavati tokom čitavog vremena zapravo mora biti postavljeno na početku, pri čemu su početna stanja svake pojedine čestice zapisana sa beskonačno mnogo tačnih decimala (cifara). Inače, u suprotnom, postojalo bi neko vrijeme u dalekoj budućnosti kada bi ovaj univerzum-sat jednostavno stao.

Ali informacija je fizička. Savremena istraživanja pokazuju da ona zahtijeva energiju i zauzima prostor. Poznato je da svaka zapremina prostora ima konačan informacioni kapacitet (pri čemu je najgušće moguće informaciono spremište unutar crnih rupa). Kako tvrdi Žizen, početni uslovi univerzuma bi zahtijevali isuviše mnogo informacija natrpanih u isuviše mali prostor. On kaže: "Realan broj sa beskonačno mnogo decimala (cifara) ne može biti fizički relevantan. Blok univerzum, koji implicitno pretpostavlja postojanje beskonačne informacije, morao bi se raspasti". I tako je Žizen počeo da traži novi način opisivanja vremena u fizici koji ne pretpostavlja beskonačno precizno znanje o početnim uslovima.

3.1.2 Logika vremena

U modernom shvatanju da postoji kontinuum realnih brojeva, od kojih većina ima beskonačno mnogo cifara nakon decimalne tačke, ima malo tragova užarene debate oko ovog pitanja koja se vodila u prvim decenijama 20-tog vijeka. David Hilbert, veliki njemački matematičar, prihvatio je danas standardno viđenje da realni brojevi postoje i da se sa njima može manipulisati kao sa potpunim entitetima. "Opozicija" ovom shvatanju bili su matematičari "intuicionisti" koje je predvodio poznati holandski topolog L.E.J. Brouver (Brouwer), koji je matematiku vidio kao konstrukt. Brouver je insistirao da brojevi moraju biti konstruktibilni, odnosno da njihove cifre moraju biti izračunate ili izabrane ili slučajno određene **jedna po jedna**. Brojevi su konačni, govorio je Brouver, a oni su takođe i **procesi**. Oni mogu postajati sve tačniji kako se sve više cifara otkriva u onome što je on zvao sekvenca izbora, tj. funkciji koja proizvodi vrijednosti sa sve većom i većom tačnošću.

Time što je vezao matematiku za ono što se može konstruisati, intuicionizam je imao dalekosežne posljedice za matematičku praksu i za određivanje koje se tvrdnje mogu smatrati tačnim. Najradikalniji otklon od standardne matematike je taj da zakon isključenja trećeg, hvaljeni princip još od vremena Aristotela, više ne važi. Zakon isključenja trećeg kaže da ili je neka tvrdnja tačna, ili je njena negacija tačna, što je jasan skup alternativa koji nudi moćan način zaključivanja. Ali u Brouverovom okviru, tvrdnje o brojevima mogu biti ni tačne ni netačne u datom trenutku, pošto se tačna vrijednost broja još nije otkrila.

Nema razlike od standardne matematike kada je riječ o brojevima kao što su 4, ili $1/2$ ili π, odnos obima i prečnika kruga. Iako je π iracionalan i nema konačnu decimalnu ekspanziju, postoji algoritam za generisanje njegove decimalne ekspanzije, što čini π isto toliko određenim koliko je napr. i broj $1/2$. Ali razmotrimo drugi broj x koji je "u terenu" broja $1/2$.

Recimo da x ima vrijednost 0.4999, gdje se dalje cifre "odmotavaju" u sekvenci izbora. Možda će se sekvenca devetki nastaviti zauvijek, u kojem slučaju x konvergira ka tačno $1/2$. (Ova činjenica, da je $0.4999\cdots = 0.5$, je takođe tačna i u standardnoj matematici, pošto se x razlikuje od $1/2$ za manje od bilo koje konačne razlike.)

Ali ako u nekoj budućoj tački sekvence izbora, iskoči neka cifra različita od 9 (ako, recimo, vrijednost x postane $0.4999999999999997\ldots$) tada bez obzira šta će se desiti poslije, x je manje od $1/2$. Ali prije nego što se to desi, kada je sve što znamo 0.4999, "mi ne znamo hoće li se ili neće cifra različita od 9 ikada pojaviti," objašnjava Karl Posi (Carl Posy), filozof matematike sa Hebrejskog univerziteta u Jerusalimu i vodeći ekspert za intuicionističku matematiku. "U trenutku kada posmatramo taj x, ne možemo reći da je x manje od $1/2$, niti

možemo reći da je jednako 1/2." Tvrdnja "x je jednako 1/2" nije tačna, a nije tačna ni njena negacija. Zakon isključenja trećeg ne važi.

Pored toga, kontinuum ne može biti čisto presječen na dva dijela koji se sastoje od svih brojeva manjih od 1/2 i svih brojeva većih ili jednakih od 1/2. "Ako pokušate presjeći kontinuum napola, ovaj broj x će se zalijepiti za oštricu noža, i neće biti ni na lijevoj ni na desnoj strani," kaže Posi. "Kontinuum je viskozan, on je ljepljiv."

Hilbert je uporedio uklanjanje zakona isključenja trećeg iz matematike sa "zabranom bokseru da koristi svoje pesnice," pošto ovaj princip stoji iza mnogih matematičkih dedukcija. Iako je Brouverov intuicionistički okvir fascinirao i takve matematičare kao što su Kurt Gedel (Kurt Gödel) i Herman Vajl (Hermann Weyl), standardna matematika, sa svojim realnim brojevima, dominira zbog lakoće svoje upotrebe.

3.1.3 Razvijanje vremena

Žizen se prvi put susreo sa intuicionističkom matematikom na jednom sastanku prošle godine na kome je učestvovao i Posi. Kada su njih dvojica razgovarali, Žizen je brzo uvidio vezu između odmotavanja decimalnih cifara brojeva u ovom matematičkom okviru i fizičkog pojma vremena u univerzumu. Izgledalo je da materijalizovanje cifara prirodno korespondira sa sekvencom momenata koji definišu sadašnjost, dok neodređena budućnost postaje konkretna realnost. Odsustvo zakona isključenja trećeg je slično nedeterminističkim tvrdnjama o budućnosti.

U nedavno objavljenom radu u časopisu *Physical Review*, Žizen i njegov saradnik Flavio Del Santo koristili su intuicionističku matematiku da formulišu alternativnu verziju klasične mehanike, takvu koja će davati ista predviđanja kao i standardne jednačine, ali će određivati događaje kao nedeterministička stvarajući sliku univerzuma gdje se neočekivano događa i gdje se vrijeme odvija.

Ovo donekle liči na (meteorološko) vrijeme. Sjetimo se da ne možemo dati preciznu vremensku prognozu zato što ne znamo početne uslove za svaki atom na Zemlji do beskonačne tačnosti. Ali u Žizenovoj nedeterminističkoj verziji priče, ovi egzaktni brojevi nisu nikad ni postojali. Intuicionistička matematika zauzima ovakav stav: Cifre koje određuju stanje (meteorološkog) vremena sve tačnije i tačnije, i diktiraju njegovu evoluciju sve dalje u budućnost, su izabrane u realnom vremenu kako se ta budućnost odvija u sekvenci izbora. Renato Rener (Renner), kvantni fizičar sa švajcarskog federalnog instituta za tehnologiju u Cirihu, kaže da "Žizenovi argumenti ukazuju da su deterministička predviđanja fundamentalno nemoguća uopšte".

Drugim riječima, svijet je nedeterministički; budućnost je otvorena. Žizen kaže: "Vrijeme se ne odvija kao film u bioskopu. To je zaista kreativno odvijanje. Nove cifre se zaista stvaraju kako vrijeme prolazi".

Fej Dauker (Fay Dowker), teoretičar kvantne gravitacije sa Imperial College-a u Londonu, kaže da je ona "vrlo bliska" Žizenovim argumentima, jer je "on na strani onih od nas koji misle da fizika nije u skladu sa našim iskustvom i da joj stoga nešto nedostaje". Dauker se slaže da matematički jezici oblikuju naše razumijevanje vremena u fizici, i da je standardna Hilbertovska matematika koja tretira realne brojeve kao potpune entitete "sigurno statična. Ona ima taj karakter da je bezvremena, i ona je definitivno ograničenje za nas kao fizičare ako pokušavamo da inkorporiramo nešto tako dinamično kao što je naše iskustvo protoka vremena".

Za fizičare kao što je Dauker koje interesuju veze između gravitacije i kvantne mehanike, jedna od najvažnijih implikacija ovog novog pogleda na vrijeme jeste kako on počinje da

premoštava ono što se dugo smatralo za dva uzajamno nekompatibilna viđenja svijeta. Rener kaže: "Za mene je jedna od implikacija ta da je klasična mehanika na neki način bliža kvantnoj mehanici nego što smo mislili".

3.1.4 Kvantna neodređenost i vrijeme

Ako fizičari žele da riješe misteriju vremena, moraju se uhvatiti u koštac ne samo sa Ajnštajnovim prostorno-vremenskim kontinuumom, nego takođe i sa saznanjem da je univerzum fundamentalno kvantni i da njime vladaju slučaj i neodređenost. Kvantna teorija daje vrlo različitu sliku vremena od Ajnštajnove teorije. Rener kaže: "Naše dve velike teorije u fizici, kvantna teorija i opšta relativnost, tvrde različite stvari". On i nekoliko drugih fizičara kažu da je ova nekonsistentnost u osnovi borbe za pronalaženje kvantne teorije gravitacije (opisa kvantnog porijekla prostor-vremena) i za razumijevanje zašto se dogodio Big Bang. Ako pogledamo gdje imamo paradokse i koje imamo probleme, na kraju se sve uvijek svede na to kako shvatiti vrijeme.

Vrijeme u kvantnoj mehanici je rigidno, nije savitljivo niti isprepleteno sa dimenzijama prostora kao u relativnosti. Nadalje, kako kaže Rener, mjerenja kvantnih sistema čine vrijeme u kvantnoj mehanici ireverzibilnim, dok je inače teorija kompletno reverzibilna. To bi značilo da u ovoj stvari vrijeme igra ulogu koju mi zapravo još uvijek ne razumijemo.

Mnogi fizičari interpretiraju kvantnu fiziku tako što kažu da je univerzum nedeterministički. Nima Arkani-Hamed, fizičar sa Instituta za napredne studije u Prinstonu, Nju Džersi, kaže ovako: "Uočite ovo: uzmimo dva atoma uranijuma. Jedan od njih se raspada nakon 500 godina, a drugi se raspada nakon 1000 godina, a ipak oni su potpuno identični na svaki način. U svakom razumnom smislu, univerzum nije deterministički".

Ipak, druge popularne interpretacije kvantne mehanike, uključujući tzv. "interpretaciju mnogo-svjetova" ili "multiverzum", uspijevaju da održe klasično, determinističko viđenje vremena živim. Ove teorije opisuju kvantne događaje kao da oni odražavaju predeterminisanu realnost. Mnogo-svjetova, na primjer, kaže da svako kvantno mjerenje cijepa svijet na višestruka grananja u kojima se realizuje svaki mogući ishod, od kojih je svaki postavljen unaprijed.

Žizenove ideje idu u drugom pravcu. Umjesto da pokušava da učini kvantnu mehaniku determinističkom teorijom, on se nada da će obezbijediti zajednički, nedeterministički jezik i za klasičnu i za kvantnu fiziku. Ali ovaj pristup se razlikuje od standardne kvantne mehanike u jednom važnom aspektu.

U kvantnoj mehanici, informacije se mogu izmiješati ili izokrenuti, ali nikada stvoriti ili uništiti. Međutim, ako cifre brojeva koji definišu stanje univerzuma rastu tokom vremena kao što predlaže Žizen, tada nastaje nova informacija. Žizen kaže da on "apsolutno" odbacuje mišljenje da je informacija očuvana (konzervirana) u prirodi, uglavnom zato što je "jasno da postoji nova informacija koja se stvara tokom procesa mjerenja", pa dodaje da nam je potreban drugi način gledanja na sve ove ideje.

Ovaj novi način razmišljanja o informaciji može da sugeriše i rješenje informacionog paradoksa crne rupe, gdje se razmatra šta se dešava sa informacijama koje progutaju crne rupe. Opšta relativnost implicira da informacije bivaju uništene, dok kvantna teorija kaže da one bivaju očuvane. Otuda paradoks. Ako drugačija formulacija kvantne mehanike u smislu intuicionističke matematike dozvoljava da informacija bude stvorena kvantnim mjerenjima, možda ona onda dozvoljava da informacija bude i uništena.

Džonatan Openhajm (Jonathan Oppenheim), teorijski fizičar sa University College-a u Londonu, vjeruje da se informacije zaista gube u crnim rupama. On ne zna da li će Brouverov

intuicionizam biti ključan da se ovo dokaže, kao što tvrdi Žizen, ali kaže da postoji razlog da se razmišlja o tome da bi stvaranje i uništavanje informacija moglo biti duboko povezano sa vremenom. Informacija se uništava kako napredujemo u vremenu, ali ona se ne uništava kada se krećemo kroz prostor. Dimenzije koje čine Ajnštajnov blok univerzum se veoma razlikuju jedna od druge.

Zajedno sa podrškom ideji o kreativnom (i možda destruktivnom) vremenu, intuicionistička matematika takođe nudi novu interpretaciju našeg svjesnog iskustva vremena. Prisjetimo se da je u ovom okviru, kontinuum ljepljiv, i da ga je nemoguće presjeći nadvoje. Žizen asocira ovu ljepljivost sa našim osjećajem da je sadašnjost "gusta", da je to značajan trenutak, a ne tačka nulte širine koja čisto razdvaja prošlost od budućnosti. U standardnoj fizici, zasnovanoj na standardnoj matematici, vrijeme je kontinualni parametar koji može uzeti bilo koju vrijednost na brojevnoj pravoj. Međutim, kako kaže Žizen, ako se kontinuum predstavi pomoću intuicionističke matematike, tada se vrijeme ne može oštro presjeći nadvoje. Ono je zgusnuto, u istom smislu kao što je zgusnut med".

Za sada je to, naravno, samo analogija. Openhajm kaže: "Imam dobar osjećaj o ovom shvatanju da je sadašnjost gusta. Ali nisam siguran zašto imam takav osjećaj".

3.1.5 Budućnost vremena

Žizenove ideje su pokrenule čitav niz odgovora od strane drugih teoretičara, svakoga sa svojim misaonim eksperimentima i intuicijama o vremenu.

Nekoliko eksperata se složilo da realni brojevi ne izgledaju i fizički realni, i da fizičarima treba novi formalizam koji se ne oslanja na njih. Ahmed Almheiri, teorijski fizičar sa Instituta za napredne studije u Prinstonu, koji proučava crne rupe i kvantnu gravitaciju, kaže da kvantna mehanika isključuje postojanje kontinuuma. Kvantna matematika uvezuje energiju i druge veličine u pakete, koji su više slični cijelim brojevima nego kontinuumu. A beskonačni brojevi bivaju skraćeni unutar crnih rupa. Crna rupa može izgledati kao da ima kontinualno beskonačan broj unutrašnjih stanja, ali ona bivaju odsječena zbog kvantno-gravitacionih efekata. Realni brojevi ne mogu postojati, zato što ih nije moguće sakriti unutar crnih rupa. U suprotnom, one bi bile u stanju da sakriju beskonačnu količinu informacija.

Sandu Popesku (Popescu), fizičar sa univerziteta u Bristolu koji je često u komunikaciji sa Žizenom, se slaže sa njegovim nedeterminističkim pogledom na svijet, ali kaže da nije ubijeđen da je intuicionistička matematika potrebna. Popesku ima primjedbu na ideju da se cifre realnih brojeva računaju kao informacije.

Arkani-Hamed smatra da je Žizenova upotreba intuicionističke matematike interesantna i potencijalno relevantna u slučajevima kakvi su crne rupe i Big Bang gdje gravitacija i kvantna mehanika dolaze u očigledan konflikt. On kaže: "Ova pitanja, o brojevima kao konačnim ili o fudamentalnim stvarima koje postoje ili o tome da li postoji beskonačno mnogo cifara ili o tome da li se cifre stvaraju kako idete naprijed, mogu biti povezana sa tim kako bismo napokon trebali razmišljati o kosmologiji u situacijama gdje ne znamo kako da primijenimo kvantnu mehaniku". On takođe vidi potrebu za novim matematičkim jezikom koji može "osloboditi" fizičare od beskonačne tačnosti i dozvoliti im da "govore o stvarima koje su malo zamagljene sve vrijeme".

Žizenove ideje odjekuju na mnogim mjestima, ali još uvijek im je potrebna konkretizacija. U narednom periodu, on se nada da će naći način da preformuliše relativnost i kvantnu mehaniku u smislu konačne, zamagljene intuicionističke matematike, kao što je već učinio sa klasičnom mehanikom, potencijalno zbližavajući ove dve teorije. On ima neke ideje kako pristupiti ovome sa kvantne strane.

Jedan način na koji se beskonačnost "provukla" u kvantnu mehaniku je u tzv. "problemu repa". Žizen kaže: "Pokušajmo da lokalizujemo kvantni sistem, na primjer, jedan elektron na Mjesecu, i ako to uradimo sa standardnom matematikom, moraćemo priznati da taj elektron na Mjesecu ima super-malu vjerovatnoću da takođe bude detektovan na Zemlji. 'Rep' matematičke funkcije koja predstavlja poziciju čestice postaje eksponencijalno mali, ali nenulti".

Ali Žizen se pita: "Koju realnost treba dodijeliti super-malom broju? Većina eksperimentalista će reći: 'Stavi to na nulu i prestani da pitaš.' Ali možda će oni više teorijski orijentisani reći: 'U redu, ali ovdje nešto ima sudeći po matematici."

Ali to zavisi, sada, po kojoj matematici. Po klasičnoj matematici, nečega ima. Po intuicionističkoj matematici nema ničega. Elektron je na Mjesecu, i njegova šansa da se pojavi i na Zemlji je zaista i istinski nula.

Kako će se ova krajnje interesantna ideja dalje razvijati, ostaje da se vidi. U budućnosti.

Duško Milinčić
15. juna 2020.

3.2 Парадокс информације код црних рупа

Према принципима конзервације и минимализма информације универзум нерадо даје нове информације. Међутим, да ли је могуће да их и уништава и на који начин би се то десило?

Размотримо шта се дешава у црним рупама према актуелним теоријама. Како објекти падају у црну рупу, са њима одлази и информација о њима. За посматрача споља, информација о објекту се таложи на површину црне рупе. То се дешава према специјалној теорији релативности као посљедица дилатације времена. Што је објекат масивнији, то више закривљује просторвријеме, што утиче на протицање времена. Из једначина се може видјети да повећањем масе, ефекат дилатације постаје све већи, тако да вријеме трајања догађаја у црној рупи (пад објекта у њу) протиче много спорије за посматрача који је јако удаљен од црне рупе.

Заправо, вријеме потребно да информација о објекту потпуно нестане у рупи траје бесконачно. Можемо рећи да се за посматрача ван црне рупе вријеме зауставља на хоризонту догађаја, тј.информација о објекту остаје видљива мало изван хоризонта догађаја, а објекат је већ „нестао“ у црној рупи. Такође, свјетлост усљед гравитације не може да напусти простор унутар хоризонта догађаја. А пошто ништа, укључујући информацију, не може да путује брзином већом од брзине свјетлости, ништа не може да побјегне из црне рупе.

Стога бисмо посматрајући црну рупу могли да видимо све што је икад сакупила (информацију). Међутим, према Хокингу црна рупа испарава (Хокингово зрачење), иако веома мало, али ипак емитује енергију у виду топлотног зрачења. Према квантној механици, парови виртуелних честица материје и антиматерије се константно свугдје стварају. Оне се обично одмах анихилирају, међутим ако се формирају у близини хоризонта догађаја, једна честица може да пређе ову границу, а друга не. У том случају, честица ван хоризонта догађаја може да побјегне, те односи енергију црне рупе. При томе, оне не носе информацију о објекту у црној рупи.

Ако црна рупа на тај начин губи енергију, она губи и масу, што значи да ће евентуално нестати заједно са информацијом коју је носила. Стога се поставља питање шта се десило са информацијом о нашем објекту. Тачан одговор још увијек није

пронађен у потпуно конзистентној теорији, међутим његово постојање је нужно за одржање читаве квантне теорије, која захтијева одржање информације.

Слиједе занимљиве теорије које би могле ријешити овај парадокс. Једна од ранијих идеја је била да црне рупе не испаре у потпуности, већ да се зауставе на јако малој величини, чији остаци садрже оригиналне информације. Међутим, ово би имплицирало нестабилности материје при стварању таквих остатака, што је у контрадикторности са свакодневним искуством.

Колапсом веома масивних звијезда можемо (у зависности од масе) добити веома густу материју, као што је у бијелим патуљцима или неутронским звијездама. Међутим, можда постоје неки непознати закони физике који спречавају још масивније звијезде да формирају црне рупе, већ да умјесто тога формирају „масивне остатке“, сличније неутронским звијездама него црној рупи.

Међутим, не постоје закони физике који спречавају гравитациони колапс који се дешава при настанку црних рупа. То би захтијевало пренос информације брзином већом од брзине свјетлости унутар колабирајуће материје, од унутрашњости иницијалне црне рупе до коначног масивног остатка. Такође, црне рупе могу настати из веома ријетке материје, што додатно компликује објашњење формирања таквог остатка умјесто црне рупе.

Још једно могуће објашњење је на основу теорија струна, а то је да ће масивни остатак црне рупе чинити хоризонт замијењен са струнама и вишедимензионалном геометријом. Теорија струна представља честице са струнама, при чему су дозвољене више од четири димензије. Стога масивни остатак може имати вишедимензионалну геометрију много већих размјера, умјесто традиционалне оштре границе црне рупе на хоризонту догађаја.

Сљедеће могуће објашњење је да тај масивни остатак црне рупе може чинити хоризонт догађаја замијењен са „зидом“ честица високе енергије, тако да неће бити унутрашњости црне рупе. Овај „зид“ би претварао све што дотакне у енергију која би доприносила овом „зиду“. Међутим, као и прошла теорија, ово захтијева нарушење локалности, тј.коначне брзине простирања свјетлости, што би довело до особина материје са каквим се нисмо сусретали.

Сљедеће могуће објашњење је да ће информација исцурити назад. Квантна црна рупа интереагује са својом околином, кроз мале флуктуације у просторвремену, што омогућава да се информација пренесе из црне рупе на честице које из ње излазе. То би било као да црна рупа има „квантни ореол“ око себе, гдје се дешавају интеракције које преносе информацију у околину.

Ови потенцијални одговори потенцијално воде до нове ере физике, нешто попут замјене класичне физике са квантном, која се класичним физичарима тада чинила невјероватном. Свакако је јасно да ће рјешење овог парадокса дати нове информације о мистериозном универзуму. Такође, рјешење споменутог проблема нарушења локалности би могло лежати у вези квантне механике и гравитације. Засад имамо слику загонетне црне рупе из галаксије M87, те детектоване гравитационе таласе од судара црних рупа, из којих црпимо информације. Међутим, потребно је још много опсервација и праћења, те доказа за њихово објашњење.

Александра Радић
17. juna 2020.

Поговор

Показано је зашто је „информација перцепције“ нека информација и где су њени екстреми, затим да се она може разапети на многодимензионални простор обзервабли (вектора), а онда и свести у само једну раван „обзервабли“. Из њене инваријантности следе Лоренцове трансформације, такође 2-дим као и слободан пад од тачке до тачке у гравитационом пољу. Принцип минимализма информације у свим овим и сличним разматрањима може се заменити принципом најмањег дејства и обрнуто, па се из информације перцепције могу доказати Риманове, односно гравитационе геодезијске линије, као што се могу извести Ајнштајнове опште једначине. Информација перцепције сагласна је са Шредингеровом једначином. Остало је разрада ове идеје.

Растко Вуковић, април 2019.

Bibliografija

[1] Растко Вуковић: *ДЕЈСТВО ИНФОРМАЦИЈЕ* – енергија, време и комуникација; Економски институт Бања Лука, 2021 (у припреми). (https://www.scribd.com/document/440746867/Dejstvo-informacije)

[2] Растко Вуковић: *ФИЗИЧКА ИНФОРМАЦИЈА* – у друштвеним појавама и математици; Економски институт Бања Лука, 2019. (https://www.scribd.com/document/406574702/)

[3] Растко Вуковић: *МНОГОСТРУКОСТИ* – Избори живог и неживог света; Економски институт Бања Лука, 2018. (https://archive.org/details/Mnogostrukosti)

[4] Растко Вуковић: *КВАНТНА МЕХАНИКА* – репрезентација континуума – метричког и векторског простора; књига је завршена 26 априла 2018. (https://www.scribd.com/document/366396575/Kvantna-mehanika)

[5] Ming-Cheng Chen, Chang Liu, Yi-Han Luo, He-Liang Huang, Bi-Ying Wang, Xi-Lin Wang, Li Li, Nai-Le Liu, Chao-Yang Lu, and Jian-Wei Pan: *Experimental demonstration of quantum pigeonhole paradox*; PNAS January 29, 2019 116 (5) 1549-1552; first published January 11, 2019. (https://www.pnas.org/content/116/5/1549)

[6] Dr. Giorgio Colangelo, Ferran Martin Ciurana, Lorena C. Bianchet and Dr. Robert J. Sewell, led by ICREA Prof. at ICFO Morgan W. Mitchel: *Simultaneous tracking of spin angle and amplitude beyond classical limits*, Nature, March 2017.

[7] Biswaranjan Dikshit: *A simple proof of Born's rule* for statistical interpretation of quantum mechanics; Journal for Foundations and Applications of Physics, vol. 4, No. 1, 24-30 (2017).

[8] Растко Вуковић: *ПРОСТОР-ВРЕМЕ* – принципи физике случајности; Економски институт Бања Лука, мај 2017. (https://archive.org/details/Principi)

[9] Lee C. Loveridge: *Physical and Geometric Interpretations of the Riemann Tensor, Ricci Tensor, and Scalar Curvature*, September 7, 2016. (https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0401099.pdf)

[10] Растко Вуковић: *ИНФОРМАЦИЈА ПЕРЦЕПЦИЈЕ* – слобода, демократија и физика; Економски институт Бања Лука, јуни 2016. (https://archive.org/details/Informacija)

[11] Yakir Aharonov, Fabrizio Colombo, Sandu Popescu, Irene Sabadini, Daniele C. Struppa, and Jeff Tollaksen: *Quantum violation of the pigeonhole principle and the nature of quantum correlations*; PNAS January 19, 2016 113 (3) 532-535; first published January 4, 2016. (https://www.pnas.org/content/113/3/532)

[12] Nilesh P. BARDE, Sandeep D. PATIL, Pravin M. KOKNE, Pranav P. BARDAPURKAR: *Deriving time dependent Schrödinger equation* from Wave-Mechanics, Schrödinger time independent equation, Classical and Hamilton-Jacobi equations; Leonardo Electronic Journal of Practices and Technologies, ISSN 1583-1078, Issue 26, January-June 2015, p. 31-48. (http://lejpt.academicdirect.org/A26/031_048.pdf)

[13] Rastko Vukovic: *Computing the mechanical statistics*, February 13, 2015. (https://www.academia.edu/10771727/Computing_the_mechanical_statistics)

[14] Rastko Vukovic: *Bosons* – Integer spin particles, January 7, 2015. (https://www.academia.edu/10057923/Bosons_-_Integer_spin_particles)

[15] Rastko Vukovic: *Fermions* – Half-integer spin particles, January 3, 2015. (https://www.academia.edu/9994343/Fermions_half-integer_spin_particles)

[16] Rastko Vukovic: *The Lagrangian* – Newtonian and Einstein's mechanics; GSJ, November 29, 2014. (https://www.gsjournal.net/Science-Journals/Research%20Papers/View/5784)

[17] M.W. Evans and H. Eckardt: *The Bianchi identity* of differential geometry; Journal of Foundations of Physics and Chemistry, 2011, vol. 1 (5) 561–572 (http://www.aias.us/documents/uft/paper88.pdf)

[18] Растко Вуковић: *МАТЕМАТИЧКА ТЕОРИЈА ИНФОРМАЦИЈЕ И КОМУНИКАЦИЈЕ*, Друштво математичара Републике Српске, Бања Лука 1995.

[19] Zoran A. Ivković: *MATEMATIČKA STATISTIKA*, treće izdanje; Naučna knjiga Beograd, 1976.

[20] J. Bell: "On the Einstein Podolsky Rosen paradox" Physics 1 #3, 195 (1964) (https://cds.cern.ch/record/111654/files/vol1p195-200_001.pdf)

[21] Einstein, A; B Podolsky; N Rosen (1935-05-15). "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?" (https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.47.777)

[22] W. Heisenberg: *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie.* 114 Seiten. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1930. Preis geh. RM. 7,–, geb. RM. 8,50

[23] Weyl, H. (1928), Gruppentheorie und Quantenmechanik, Leipzig: Hirzel

[24] Kennard, E. H. (1927), "Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen", Zeitschrift für Physik (in German), 44 (4–5): 326–352

[25] Heisenberg, W.: Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. Zeitschrift für Physik 43, 172–198 (1927).

[26] M. Born: Quantenmechanik der Stoßvorgänge. Z. Phys. 38, 803-827 (1926).

Indeks

γ-зраке, 101
АПР парадокс, 46
Адамарова капија, 87
Ахаронов, 52
Ајнштајн, 28, 29
    опште једначине, 74
    специјална релативност, 65
Ал-Кхалили, 100
Архимед, 18
Бајесова формула, 105
Бел, 48
    противуречност, 51
Бенет, 15
Бернули, 24, 43
Блох
    сфера, 88
Болцман, 15
    логаритам, 48
Бор, 112
    модел атома, 55
Борел, 43
Борн, 60, 81
    кјубит, 87
    правило, 83
Брауново кретање, 28
Буфон, 26
Буњаковски, 98
Чебишев, 43
Чен, 52
Дарвин, 9
    еволуција, 33
Де Број, 20, 36
    хипотеза таласа, 79
    таласна дужина, 93
Дејвисон, 36
Дирак, 58
    нотација, 82, 88
Дирихле, 51
Доплер, 34
    ефекат, 54
Еверет, 22
    много светова, 89
Фајнман, 18, 55
Фридман, 39
Фурије, 41, 90
Галилеј, 25, 65
Гаус, 29
    звоно, 44
Гермер, 36
Хабл, 39
Хајзенберг, 14
    принцип неодређености, 47
    процена, 93
    релације неодређености, 18
Хартли, 13, 27
Хијерон II, 18
Хилберт
    простор, 10
Хилбертов простор, 88
Хинчин, 43
Хокинг, 10
Јанг, 36
Кантели, 43
Кардано, 43
Карно, 15
Кенард, 93
Кеплер, 25
Клаузијус, 15
Колмогоров, 43
Колмонгоров, 26
Комптон, 17, 102
    ефекат, 101
Копенхаген, 20
Кристофел, 72
    симболи, 73
Кронекер, 60

Кулон, 19
потенцијал, 55, 110
Курно, 8
Ландеур, 15
Лаплас, 26, 80
Лавоазије, 40
Леметр, 39
Лоренц, 64
лагранжијан, 71
трансформације, 64, 65, 68
Мах, 28
принцип, 37
Мајкелсон-Морли, 65
Максвел, 15
Марков, 43
Нешов еквилибријум, 53
Нетерова теорема, 10
Њутн, 25, 36, 67
Ојлер, 58
Ојлер-Лагранжове једначине, 70
Паули, 90
матрице, 91, 108
принцип искључења, 19, 56, 86
ротиране матрице, 109
Питагорина теорема, 61, 66
Планк, 14, 101
константа, 64
Поисон, 43
Пристли, 40
Ремзи, 12
Риман, 29, 72
Сагава, 16
Саскин, 10
Слајфер, 39
Шенон, 15
ентропија, 48
Шредингер, 20
једначина, 80
решавање атома, 55, 110
Шварц, 98
Шварцшилдово решење, 67
Варадараџан, 81
Вејл, 93
аксиома
објективне случајности, 88
амплитуда, 19
античестица, 34, 110
антикомутативност, 86, 107
антисиметрија, 107
атом водоника, 55, 110
азимутни квантни број, 56
бесконачност, 33
бијекција, 42
бозони, 18, 54
брзина
светлости, 101
брзина светлости, 65
будућност, 54
цена, 8
центрифугална сила, 25
црна рупа, 10
црвени помак, 39
честица, 37
чисто стање, 88
дејство, 14, 38, 49, 69
делта симбол, 60
димензије, 23
информација, 10, 19
простора, 30
вектора, 50
динамична празнина, 100
дисјунктни догађаји, 105
дискретно, 33
дисперзија, 43, 94
друштво, 32
дуалан простор, 115
дуалност, 31
дуопол, 9
двоструки отвор, 36, 52
економија, 9
експеримент
двоструки отвор, 103
експонент, 13
еквилибријум, 9
електрон, 17, 19, 101
комуникација, 55
енергија, 9, 42
ентропија, 15, 17, 31, 35, 39
Клаузијус, 48
еволуција, 33
квантна, 81
феминизација, 31, 48
фер-новчић, 27
фермион, 54
фермиони, 18, 86
физичка информација, 14

физика, 9, 28
флогистон, 40
флуид, 23
фотон, 17, 54, 101
фреквенција, 9, 42
гама коефицијент, 40
геодезијске линије, 28
геодезик, 57
геолошке наслаге, 39
главни квантни број, 55, 112
гравитација, 17, 49
гравитациона сила, 25
гравитациони потенцијал, 72
гравитационо одбијање, 53
густина вероватноће, 114
хијерархија, 11, 58
хоризонт догађаја, 10
хронолошки континуитет, 54
империјализација, 48
инерција, 49
инерцијални систем, 40
инерцијално, 17
информација, 49, 82
информација перцепције, 11, 16
    скаларни производ, 58, 92
    спрегнутост, 50, 107
информатичка васиона, 32
интелигенција, 11, 58
интензитет, 60
интерференција, 38, 103, 104
инверзија времена, 19
инволутивна матрица, 91, 108
истовременост, 32
јединични вектор, 109
капија, 87
кардиналност, 33
кинетичка енергија, 99
кјубит, 87
класична механика, 26
количина опција, 13
количина података, 8
коло, 87
комплексни бројеви, 14
комутативност, 60
конкуренција, 9
континуум, 33
конзервација информације, 10, 87
конзервирани системи, 87
користан рад, 15
косинусна теорема, 61
крило авиона, 24
квантна механика, 10
квантна спрегнутост, 46, 86, 104
квантна телепортација, 51
квантни принцип голубова, 52
квантни систем, 81
квантно стање, 10, 56, 81
лагранжијан, 38, 69
линеарност, 60
логаритам, 13
локалност, 46
магацин историје, 39
магнетни квантни број, 56, 112
магнетни момент, 114
мањак информације, 55
марксизам, 28
маса електрона, 101
математика, 9
материјализам, 27
матрица, 81
    Адамар, 88
механицизам, 25
мерење, 81
мешано стање, 88
метрика, 66
минимализам информације, 10
много светова, 37
молекуле, 48
монопол, 9
мултиверзум, 89
начело минимализма, 63, 74
не локалност, 46, 107
негативна маса, 53
неједнакост
    Буњаковски-Шварц, 98
    Хелдера, 98
непредвидљивост, 8
неред, 32, 49
независност, 106
неживи свет, 57
норма вектора, 63
нотација, 94
новинари, 31
обзервабла, 14, 81
очекивање, 43
одбијање таласа, 101

ограничење, 13, 58
олигопол, 9
оператор, 81
    енергије, 99
    Хамилтонијан, 99
    импулса, 99
опруга, 69
оптимум, 8
орбита, 56
орбитни квантни број, 112
ортови, 60
осцилација, 9
пар рукавица, 47, 107
парадокс близанаца, 22
парадокс информације, 100
парадокс возова, 24
паралелна реалност, 23, 24, 32
перцепција, 8
периодичност, 8
периодни систем елемената, 56
перпетуум мобиле, 15
потенцијална енергија, 99
потисак, 24
потпуна вероватноћа, 105
позитивне информације, 55
позитрон, 19
право, 31
пребројиво, 33
прекидач, 87
преламање таласа, 101
приход, 8
принцип
    голубова, 51
    информације, 16, 31
    минимализма, 8, 14, 69
    најмањег дејства, 12
    неодређености, 99
    случајности, 81
    вероватноће, 82
принципи релативности, 65
профит, 8
производ догађаја, 105
пројекција, 60, 62
простор памти, 37, 53
протон, 19
рационалан број, 33
расход, 8
расподела, 32
равнотежно стање, 9
разбијање, 105
размазаност положаја, 54
развој васионе, 53
реалност, 34
релација
    неодређености, 93
релације неодређености, 14, 46
релативна енергија, 54
ретроактивно, 20, 21
ретрокаузалност, 51, 55
ротација, 68
садашњост, 54
сепарација варијабли, 111
сферни систем, 55, 110
сила, 8, 40
симетрија, 64
синергија, 104
синусне функције, 41
систем координата, 59
скаларни производ, 58, 63
скривање информације, 23
скривени параметри, 47
слобода, 12, 13
    информација перцепције, 58
    скаларни производ, 50
случајност, 23
спин, 19, 50, 56
спорт, 31
способност, 13, 58
спрегнутост, 20, 52
    парадокс, 51
средња вредност, 94
стања електрона, 114
стојећи таласи, 41
сукоб, 31
суперпозиција, 14, 21, 81, 87
суперсиметрија, 42
свет идеја, 8
светлост, 34
тачна теорија, 55
талас вероватноће, 103
таласи материје, 41
таласна дужина, 101
тамна енергија, 39
тамна енергија и материја, 55
тамна материја, 39
техничка информација, 13

температура, 15, 35, 49
тензори, 28
теорија хаоса, 26
теорија информације, 8
теорија релативности, 22, 33, 64
теорија струна, 23
теорија вероватноће, 26
термодинамика, 15, 32
топлота, 15, 35, 49
топологија, 30
транслација, 61
угао расипања, 101
унитарни оператор, 10
усисавање, 25
условна вероватноћа, 105
вакуум, 19, 32, 37, 39, 100
векторски простор, 81
велика експлозија, 53
вентил, 87
вероватноћа, 27
виртуелан, 23
    фотон, 19
    информација, 24
виртуелна честица, 100
виртуелна сфера, 55
вишесветна интерпретација, 22
водоников атом, 113
временске димензије, 32
временске осе, 30
закон конзервације, 8
закон одржања, 19, 66, 101
закон великих бројева, 32, 43
закони конзервације, 87
збир догађаја, 105
златна теорема, 43
звук, 34
живи свет, 57
живо биће, 11, 49, 53
живот, 32
животност, 12