Растко Вуковић

ФИЗИЧКА ИНФОРМАЦИЈА

у друштвеним појавама и математици

издавач

Економски институт Бања Лука, 2019.

RS

april, 2019

publisher

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна и универзитетска библиотека
Републике Српске, Бања Лука

519.72

ВУКОВИЋ, Растко
Физичка информација у друштвеним појавама и математици / Растко Вуковић. - Бања Лука : Економски институт, 2019 ([б.м. : б.и.]). - 103 стр. : илустр. ; 30 cm

Напомене и библиографске референце уз текст. - Библиографија: стр. 99-100. - Регистар.

ISBN 978-99938-854-6-7

COBISS.RS-ID 8404248

Растко Вуковић
ФИЗИЧКА ИНФОРМАЦИЈА – у друштвеним појавама и математици
© Економски институт, Бања Лука, 2019.
https://www.scribd.com/document/406574702/

Лектори и рецензенти:

Душко Милинчић, информатика
Александра Радић, физика
Драгана Галић, математика

Горан Дакић, граматика

Предговор

Ова се књига састоји из два јасно одвојена дела. Први део првог дела чине колумне у дневном медију[1] које излазе четвртком. То је портал за вести из текуће праксе, углавном политичке природе из угла опозиционара, чији су уредници некако толерисали и моје помало неприкладне текстове. У наставку сам их допунио сличним деловима који би требало такође да „разблаже“ књигу и да је приближе и читаоцима који се лакше сналазе са филозофијом него са математиком.

Други део књиге су строжија разматрања, дефиниције, ставови и докази у вези са физичком информацијом које сам разрађивао мало раније или упоредо са колумнама, а понешто и објављивао на слободним сајтовима попут readgur.com или academia.edu. Нема потребе помињати те фрагменте и анализе од пет до десет страна, често неуредних, незанимљивих покушаја и грешака, али који су током разраде своје тематске идеје радили важан посао. У време пре открића, таква, касније досадна тражења изгледају увек узбудљивије.

Трећи део намерно пропуштам. Ту сам могао да препричам и неке моје налазе о степеном закону (енг. power law), делом надовезане на Барабашијева истраживања слободних мрежа, а затим и из теорије игара, али питање је ко би то читао. Писања о чворовима, мрежама и бирању опција ради, рецимо победе или веза између те две теорије једнако би била математички сувопарна, као и израчунавања расподела које овде следе, да би одвратила и оно мало евентуалних читалаца ове књиге. Биће можда прилика и за такве објаве, али и ако не буде, није нека штета.

Р. Вуковић, април, 2019.

[1] http://izvor.ba/

Sadržaj

1 Друштво **7**

1.1 Слобода . . . 8
1.2 Либерализам . . . 9
1.3 Истина или лаж . . . 10
1.4 Феминизација . . . 11
1.5 Живот . . . 12
1.6 Једнакост . . . 13
1.7 Данинг-Кругеров ефекат . . . 15
1.8 Апатија посматрача . . . 16
1.9 Диктатура . . . 17
1.10 Злочин и казна . . . 18
1.11 Јединственост . . . 20
1.12 Слободна воља . . . 21
1.13 Понављања . . . 23
1.14 Еми Нетер . . . 24
1.15 Игре равнотеже . . . 26
1.16 Парондов парадокс . . . 27
1.17 Термодинамика . . . 29
1.18 Статистика механике . . . 30

2 Формализам **33**

2.1 Хартлијева информација . . . 34
2.1.1 Примери . . . 36
2.2 Шенонова информација . . . 37
2.2.1 Ентропија . . . 40
2.2.2 Примери . . . 41
2.3 Биномна расподела . . . 42
2.3.1 Апроксимације . . . 45
2.3.2 Информација . . . 47
2.3.3 Примери . . . 49
2.4 Густина расподеле . . . 50
2.4.1 Очекивање и варијанса . . . 52
2.4.2 Троугаона расподела . . . 55
2.4.3 Униформна расподела . . . 61
2.4.4 Информација густине . . . 62
2.5 Дискретне вероватноће . . . 67
2.5.1 Индикатори . . . 68

2.5.2 Слободни ход тачке 77
2.5.3 Слободни ход фронта 81

Bibliografija **99**

Indeks **101**

Glava 1

Друштво

Увод

Физичка информација је нова теорија. Полупопуларно са претежним освртом на физику излагао сам је у књизи „Многострукости“ (в. [3]), а пре тога у другим радовима које овде не помињем. Надовезана је на класичну информацију, тако да следи интуитивне претпоставке и експерименталне резултате о супстанци и њеној комуникацији на начин да при томе остане блиска Шеноновој дефиницији.

Прво својство *физичке информације* које не подржава Шенонова дефиниција је *закон одржања*. Информација је нарочито дефинисана количина података која остаје константна док се подаци трансформишу. Аналогно енергији која прелази из облика у облик, кинетичка у потенцијалну или хемијску или неку трећу. Затим је ту отпор природе који називам *принцип информације*. Вероватнији случајни догађаји чешће се реализују, а такви су мање информативни, па закључујемо да се шкртари са информацијом. То је принцип минимализма. Треће својство је *јединственост*, овде само поменуто, јер понајвише припада физици.

Први део књиге је разрада последица примене нове теорије информације на друштвене појаве. Не прецизирају се одреднице „физичке информације“, не користи се математика, па са становишта истине та прича постаје немогућа мисија. Тачно интерпретирана теорема може бити само нова теорема или лема или королар, а никако популарна колумна. Мала почетна грешка интерпретирања даљим корацима лако се развија у драстично погрешна схватања, аналогно *теорији хаоса* која се бави системима чије мале промене почетних услова ескалирају у велике разлике коначних резултата. Зато је хаотичан развој неистина понекад оправдано кориговати помоћу нових неистина, ради компромиса са популизмом.

Интерпретације слободе, истине, феминизације и друге о којима овде пишем, а које произилазе из још званично непознате теорије физичке информације, нису тачно једнаке ономе што смо интуитивно подразумевали под тим појмовима, али су им замало сличне. Зашто онда то објављујем? Пре свега зато што је и оно што смо мислили о истим стварима раније ретко било доследно и неретко било сумњиво. Нема ништа практичнијег од добре теорије, а бескрајне старе расправе о појмовима овде редефинисаним нису имале добар практичан развој. О њима би у пар сати било изрицано више „истина“ него што је било теорема Еуклидове геометрије, да бисмо производњом толиких знања морали постати господари галаксије, а нисмо. Затим и зато што са освајањем истина свет заиста напредује и неће на нас чекати.

1.1 Слобода

Јесте ли се икада упитали шта је то *слобода*, а да нисте морали тражити по неком политичком или филозофском речнику? Да бисте је узели просто, као „два плус два је четири“, без понирања у неко дубоко епистемолошко или когнитивно значење? На слободу се може гледати и једноставно као на нешто чега има више када је више могућности.

Слободу волимо зато што волимо оно што хоћемо. Затворени без права на кретање или спречени у жељи да једемо сладолед зато што нам шкоди слатко или у сиромаштву јер немамо новца, слободу нам тада ускраћује правна држава, наше здравље, лоша економија. Не волимо када немамо слободу, јер „никада се не зна“ шта бисмо хтели да имамо, па је желимо просто зато што волимо да бирамо. Ходање по продавницама, живот међу изазовима, узнемиравање – све је то слобода.

Јесте ли приметили да управо зато што је пријатно, бирање је напорно? Напор мишића да ради и промене које чинимо последице су наших избора, у крајњем, оне су резултат наше слободе. Дубља анализа „количине могућности“ показала би да је она у складу са физичким дејством, али не мислим само на ту евентуалну непријатност чињења, него и на невољност суочавања са дилемама.

Истраживања ће показати да мозак не воли неизвесност, бар онолико колико је воли. Овде мислим на онај осећај тескобе пред проблемима због опција, када нам се чини да нема решења или да ће нас стрпљење издати пре него што га нађемо и када бисмо желели да се препустимо као кладић низ воду. Ми волимо ред када не волимо могућности.

Закон и правни поредак тражимо због сигурноси коју они нуде, а затим и због ефикасности коју прижељкујемо надајући се још већој сигурности. Као и сигурност, слобода је дуална појава зато што је волимо мање када је имамо више. Ми се зато волимо организовати јер не волимо опције, а волимо опције да бисмо се боље организовали. Тако долазимо до појма слободе као нечега неопходног за развојност, а онда до потребе за развојем да бисмо имали сигурност, такође и ефикасност, да бисмо имали мање слободе.

Појава слободе неодвојива је од појаве неизвесности, па онда праве слободе нема без страха од развоја или, напротив, без осећаја задовољства у владању могућностима. Дивимо се вештини решавања проблема, као и лакоћи живљења, због истог разлога. Због страха од слободе, односно од радости од способности суочавања са њом. То су оне исте емоције које државу терају у диктатуру или у развој.

Слобода као „количина могућности“ нужно доводи до закључка да је сигурност супротност слободи. Заменити парче слободе за парче сигурности тада је губитак и једног и другог, јер самим одузимањем слободе смањујемо неке дилеме и постајемо безбедни од права на суочавање са животом. Од чега је тигар сигуран у кавезу?

Слобода је право на опције, на развојност, на могућност удобности, а не гаранција. Она је таква напорна појава!

`http://izvor.ba/`
7. марта 2019.

1.2 Либерализам

Либерализам је покрет француских револуционара (liberté, égalité, fraternité) уочи 1800. године за слободом и њеном заштитом од стране правне државе. Био је то бојни поклич за ослобађање за аристократију претећих потенцијала једнаких и, на ужас тадашњих монарха, позив на братску борбу руље против хијерархије. Знамо да свако добро има и лоше стране, али демонима либерализма још се нисмо озбиљно бавили.

Једна од мрачно-светлих страна либерализма доћи ће нам из сазнања да *једнакост* генерише сукобе. Жестина спортских такмичења долази из фер правила, оштрија је конкуренција равноправних, веће су неизвесности једнаких шанси, па испада да природа не воли једнакост.

Бог не гради дуге праве линије, он једва да може да произведе две једнаке пахуље снега и никада није био у стању да сам смисли нешто попут Фордове производне траке, а умишља тако много! Ипак, људи су и у много тежим стварима њему помагали, па до даљег остаје дилема: хоће ли либерализам заратити са тим апсолутом или ће га јадног само игнорисати? Зато му је добро да ћути и да се крије.

У друштвима *равноправних* лакше ничу хијерархије, јер – сада знамо – природа не воли једнакост. То видимо у овладавању америчке демократије корпорацијама, комунизама од њихових доживотних председника, револуционарне Француске од императора Наполеона или једнаких пред Богом од стране инквизиције. Хијерархијама годи равноправан народ. Тамо су оне као ајкуле у мору ситне рибе, спремније за даље међусобне борбе.

Зато што им одговара равноправност зато су нове хијерархије либерализма кренуле ка глобалном друштву, не схватајући да равнање света (у њихову корист) кошта све више и више, а заузврат добија све мање и мање, јер природа не воли једнакост. Ми који не пратимо те трошкове исто можемо да приметимо на расту *правних система*. Из дефиниције либералне државе, која штити слободе грађана, следи да држава мора рекетирати грађане, одузимати им слободе у име слободе.

Њој треба све више репресије против отпора једнакости (која генерише сукобе), а онда и више равноправности као основног ткива права. Више права ствара већу потребу за правом на спонтан, незаустављив и у том смислу стабилан начин. Они најспособнији у коришћењу слобода постају његове највеће жртве, па државе са највише права (регулације, администрације, бирократије) на крају успоравају са развојем.

Правно уређена држава временом бива све више ефикасна у заштити својих олигарха, боље него иједна држава у прошлости. Тако добијамо све мањи проценат оних који имају све већи проценат свега. Непријатна нарастајућа неравноправност настаје, слично претходном, управо у ходу ка наводној равноправности. То би се могло приказати и као велика завера природе против малих обичних људи, евентуално у корист технократа који вребају са стране.

Ако либерализам не зауставе поменути апсурди, природа ће своје гонити и даље. Државе ће тежити формама стабла дрвета сатканог од живих ћелија или неким сличним сложеним живим бићима. Њима и нама заједничко биће рађање сопствених универзалних јединки које умиру специјализоване, које еволуирају у мање слободне, мање паметне на уштрб целине и мање репродуктивне.

Право ће лакше надвладати застареле хијерархије попут породице, обичаја, религије, него нове борце које је изнедрио сам либерализам. Ту пре свега мислим на савремене власнике новца и моћи који ће пре или касније хтети овладати правом. У почетку опрезно, рецимо са наивним лобијима или повременим узвраћањем правне

државе по корупцији, када ћемо је видети као сукоб добра и зла, затим равнотежу јин-јанг, женског и мушког принципа, да би на крају она могла постати борба за живот у којој навијамо против правних ограничења.

Либерализам је идеологија слободе која у име ослобађања рађа контролу већине од стране система и система од стране малобројних. Па ипак, стрепећи од других адута које природа скрива у својим рукавима, због притиска моћника, а на крају и због навике и незнања, остајемо у либерализму.

14. марта 2019.

1.3 Истина или лаж

Пита ме један како да разликује *истину од лажи* у данашњим медијима. Питања истине и неистине су највеће тајне универзума и сваки нови помак у тој области преокреће изглед наше цивилизације. Није могуће имати „универзални кључ“ за истине осим ако си господар свемира. Мислим тако, али ипак одговарам да постоје одређени начини.

Највеће је чудо да нам је истина уопште доступна и то чудо открили су древни Грци. Они су први разумели мистичан однос између претпоставке, импликације и последице. За сваку тврдњу установили су само два стања – тачно или нетачно. Нема трећег. Приметили су да из нетачне претпоставке (добром) дедукцијом произилазе и тачне и нетачне последице, а из тачне само тачне и био је то почетак математике. Када можемо доказати да је неко тврђење и тачно и нетачно, онда имамо *контрадикцију*, а када је имамо, онда је претпоставка нетачна. Затим, нетачна претпоставка значи да је њена негација тачна. И то је то. Дедукција је од тада користан додатак контрадикцији, али њен сјај бледи.

Према томе, врховни доказ за откриће лажи је контрадикција. Меке верзије су основане сумње, попут опијајуће лакоће „доказивања“. Друге долазе из теорије игара. Алатке игре на победу су жеља за победом, агресивна игра и лаж (лукавост). Снага ове треће опада разоткривањем, а то нам отежава посао, јер је боље „пакују“. Ако је у току надметање, негде се налазе и лажи, али играч на компромис, стратегија добар-добар не иде на победу, па то даље компликује ствари. Мањак лажи је врлина „добрице“; за разлику од „злоће“ који ће чак и са губитак-губитак (напредовање жртвом) вероватно победити. Агресивна особа (институција) у друштвеним надметањима која стреми успеху или моћи одважна је, дрска, мора да лаже. А то је већ нешто у разоткривању?

Методу контрадикције не виђамо свакодневно зато што је тешка и одбојна. Она је игра за ретке. Математика је тело у које такви стављају тврђења, а које нам оно враћа ако су тачна. То апстрактно тело можемо замислити и као робота који за нама понавља само тачне реченице. Јасно је да у телу истина нема места за „брицу који у свом месту брије све оне и само оне који се не бријају сами“? Дотични робот не може рећи „ја лажем“, али може рећи „ја не могу рећи лаж“. Он може једном рећи „ја не могу рећи лаж два пута“, али ово не може рећи два пута. Ако сте разумели, онда сте талентован математичар и немам шта даље да причам. А ако нисте, онда је јасно колико је метода контрадикције тешка!

У примерима попут ових, Бертранд Расел је 1903. године открио *парадоксе* у тадашњој тзв. наивној теорији скупова која је затим коригована. Гедел је 1931. године доказао *теорему непотпуности* која каже да није могућа структура истина која би све своје истине могла сама доказати. Овим су додатно смањили важност дедукције,

као и моћ аксиоматских теорија. Укратко, не постоји скуп свих скупова, не постоји теорија свих теорија, нема формуле свих формула. Штавише, иако нас (супстанцу) непосредно покрећу само истине, оне се могу правити и од лажи, рецимо негацијом или импликацијом.

Контрадикција је много тежа од дедукције и зато су дебате популарније од геометрије. Зато увелико полемишемо и производимо статистички значајне проценте судски погрешно осуђених, наивно настојећи да ту нешто поправимо у незнању да смо заправо жртве шкртарења природе у давању информације. Грци су приметили одшкринута врата за истине, а ми да природа своје истине не даје радо. Њену шкртост препознајемо у опијајућој лакоћи полемисања (из нетачних претпоставки), у већој привлачности лажи и полуистина од истина, у већој брзини ширења дезинформација интернетом или у чињеници да је лакше кодирати него декодирати. Зато што је *информација* већа када је мање вероватна чешће се реализују вероватнији догађаји. Тешкоће са истинама, дакле, нису само наша ствар, него је то универзално начело.

Тај универзални принцип, да природа не воли истину иако је само истина непосредно покреће, олакшава живот лажовима, такмичарима, манипулаторима. Он свет чини занимљивијим и открива нам неке дубље везе између податка, информације, дејства и интеракције. Али о томе ћемо неком другом приликом.

21. марта 2019.

1.4 Феминизација

Локално и шаљиво у некој приватној преписци са колегама употребио сам израз *феминизација* за физичке процесе који одустају од вањског света. Уреди ти прво своју средину, а онда ћеш лако даље – добронамерно су коментарисали ширећи му значење, али саветујући ме ипак да не развијам идеју и примене. Да не дангубим.

Други закон термодинамике, познато је, говори о спонтаном преласку топлотне енергије са тела више на суседно тело ниже температуре. До Болцмана 1905. године, корацима од Клаузијуса, Гибса и Карноа, тај је закон примећен у облику спонтаног раста *ентропије* (нереда) у једноликом распоређивању молекула ваздуха у соби.

Аморфним, безличним молекулама гас као да сакрива информацију о себи, смањује њену емисију вани и бави се унутрашњим уређењем, па је згодно рећи да феминизира. Покушајте сада исти процес не разумети као повећање нереда (ентропије), него напротив – као повећање унутрашњег реда и ето вам потребе за бољим термином. Ето и открића наличја ентропије, односно нереда.

То се може посматрати још општије. Неизвесност пре бацања новчића, слушање вести, несреће реализује се у информацију након. Новости размењујемо комуникацијом, као и честице последице својих интеракција. Због мноштва могућности интеракцијама нема краја, али оно што је кренуло стиже. Сматрамо да је информација пластична попут енергије, да се и она трансформише из облика у облик, не настајући ни из чега нити нестајући ни у шта, јер иначе доказ *експериментом* не би ваљао.

Из овог закона одржања, међутим, следи коначност сваког својства информације. Наиме, *бесконачан* је онај скуп који је количином једнак неком свом правом делу. Из истог одржања разумемо да је и неизвесност информација. Када унутра има мање неизвесности него вани, уређивање унутрашњости је мање ризично од вањских похода, предвидљивије је и питомије. Окретање ка тој страни непознатог јесте феминизација.

Ако сте ово разумели, онда ћете „феминизацију“ лако пренети на *жива бића*, јер су њихова главна својства управо опције и одлучивања. Популација мање угрожена од вањских опасности прилагођава се и феминизира. Иницијативе биљоједа, сакупљача или лешинара мање су дрске према вани него код звери.

Ако није у агресивној средини, интровертна врста може еволуирати ка оптимуму када би је свака промена само кварила. То савршенство има своју цену у заостајању и застаревању у односу на динамичну околину. Зато су надвладале двополне врсте, боље адаптиране на сложене односе и дивље средине са мушким полом који би преузимао страдања или успехе у ситуацијама ризика?

Знак питања стоји, јер је ово неистражен терен у *биологији*. Ипак, прихватамо да јединке у младости срљају и стичу искуства за зрелост, а да успоравају са авантурама у старости. У том смислу су и саме организације живих бића попут живих бића, па употреба нове одреднице допире и, рецимо, до друштвених појава.

Свака од 30-ак познатих цивилизација које су феминизирале претходно су биле у експанзији, неретко бруталној. Феминизација није означила крај баш све и једне цивилизације, али никада се није десило обрнуто – да она означи империјални успон неке. Препознајемо веће шансе за драстичне промене путем вањских неизвесности, а унутрашње уређивање као награду и смирај које без првог дела није било могуће.

Доследно, Сулејмана Величанственог (тзв. Законодавца) видимо као прекретницу успона Отоманске Империје и почетак „слатког пада“ тог „царства којим управљају жене“, као и друге успешне цивилизације које су преко свог халапљивог успона и богаћења стизале до сигурности на свом крају. Даље се питам: да ли радни израз „феминизација“ можда и није само хомоним оном познатом из свакодневног говора?

Питања је заправо много више. Да ли је препоручени користан рад нешто најкорисније што бисмо могли радити, шта би пракса без добрих теорија, да ли (правним) редукцијама агресивности заиста градимо бољу будућност?

28. марта 2019.

1.5 Живот

Ето шта је *живот* (цитирам једну старију госпођу): „на једна врата уђеш, на друга изађеш и готово!“ Може ли се и о томе рећи нешто егзактније? Сигурно је да може, али за почетак заборавите на уобичајене расправе о смислу живота и „науке“ о њему самом.

Живот се може дефинисати и помоћу комуникације и алтернативно помоћу дејства – производа енергије и трајања. Овај други појам је науци познатији, па га размотримо првог. Не постоји део познате материје без макар некакве енергије и трајања, а опет природа као да их жели што мање. За сваку познату трајекторију физичког кретања важи *принцип најмањег дејства*! То је основна алатка теоријске физике и још увек без значајне даље примене.

Таласи се крећу кроз средине различитим брзинама, преламајући се или одбијајући, стално најмање трошећи времена између два места на путу. Интеракције честице са околином се дешавају при најмањој могућој размени енергије. Ту шкртост дејства потврђују чувене Ојлер-Лагранжове једначине (1750) из којих затим изводимо и геодезијске линије кретања у разним областима физике, укључујући релативистичку и квантну механику. Разни минимализми се редовно потврђују експериментом. Управо та

потреба супстанце да не делује, њена себичност, међутим, омогућава јој поседовање вишка дејства.

Супстанца доказује своје постојање дејством, али са друге стране и комуникацијом. Размена информације је утолико већа што је мање вероватна, а мање вероватна је ређа, па се претходна логика минимализма дејства сада понавља са информацијом. Природна штедња информације постаје новооткривени принцип који такође покреће акумулацију информације.

Супстанцу са вишком дејства и информације коју нерадо називамо физичком, назовимо „живим бићем“, за разлику од оне која тога вишка нема. Мртва твар има минимално дејства и комуникације, а онда то значи да их жива бића имају више: жива ћелија садржи више информације од неживе супстанце од које се састоји, она има више опција на располагању и чини више одлука. Открива је кретање мимо решења Ојлер-Лагранжових једначина.

Из новог принципа – да природа шкртари са емисијом информације – долазимо до дефиниције живих бића са информацијом у вишку. Свог би се вишка живот лакше одрицао да околна твар није попуњена и зато га се мора решавати на рате интеракцијама, па и организовањем. Не комуницира се са сваким, што води удруживању првенствено сродних.

Сродност је прилика за „организовање“ што је заправо одрицање од личних слобода, од вишкова опција, од вишкова информације и дејства. Колектив настаје преузимањем акумулираних индивидуалних вишкова. Одричемо се дела својих слобода у корист правне државе, ради сигурности и ефикасности, као што живе јединке понекад еволуирају у вишу структуру. Оне се уграђују, ограничавајући себе у корист колектива, па доследно новој дефиницији живота кажемо да је и сама организација живих бића такође неко *живо биће*.

Сродност ткива живог бића иде до почетне универзалности живих ћелија. Одрастајући оне се специјализују, доприносећи тако ефикасности живог ткива. Реплика принципа минимализма. *Интелигенција* је способност коришћења опција (ревидирана дефиниција), те боље организован може бити и мање интелигентан. То се очекује еволуцијом организације.

Сложеном организму боље стоје послушници, они у уском сегменту послова, дакле специјализоване ћелије мање аутономне, не више непредвидљиве сваштаре, нити неке превише паметне, али ни такве које би се неконтролисано размножавале. У том правцу иде и развој друштвених система?

Описано гледање на живот није непознато *биологији*, али оно овим добија дубља значења. Дарвинова еволуција траје не самим случајним одабирањем, које би због мноштва могућности тежило расулу, него и принципом информације који га води ка организацији. Живот јединке, колоније, па и врсте, тако постаје попут буре на океану. После олује гране сунце и све се смири, као да је невреме било нежељени поремећај, а његово смиривање успех, али ми додатно, видимо и неку привлачност у немиру. Покреће нас лепота живота.

4. априла 2019.

1.6 Једнакост

Каже ми један колега да испричам нешто о *једнакости*. Може, али да се зна да природа не воли велика равнања ни у којем погледу и да је ми у том смислу силујемо.

Природа мрзи равноправност и чиниће све да осујети идеологију правних система.

Барабаши, амерички математичар мађарског порекла, од недавно (2000) истражује мреже. Интернет, далеководи, популарност, ток новца – примене су његових открића која једном утврђена постају универзална ствар.

Мреже постају гушће повећавањем броја чворова – рецимо нових корисника веба или раскрсница саобраћајница, а равноправност се изражава насумичним повезивањем новог упоришта са већ постојећим линијама. Тако се ипак издвајају центри, *концентратори*, са много повезница, просто због растуће вероватноће повезивања. Они су агрегатори, монополи токова новца, базе података, командна места, увек малобројни и у функцији уштеде комуникације својих мрежа. Карактеристика су расподеле тзв. *степеног закона* (енг. power law).

Правило *шест корака раздвајања* је последица Барабашијеве расподеле. Слободно настала познанства са неким ко зна некога ко зна неког и тако редом у (око) шест корака од-до повезаће (скоро) сваки пар особа ма како великог мноштва. Лакоћа повезивања опет се постиже преко ретких појединаца са многобројним познаницима. Инсистирање на другачијој равноправности, на пример конекцијом баш сваког пара чворова, доводи до брзе загушености мреже, а везање само суседних, као у дечијој игри *глувих телефона*, до успоравања и непоузданости.

Синергија (грч. *συνεργός* – радити заједно), стање у којем је целина нешто већа и другачија од својих делова, сада значи акумулацију информације. Настали бонус постаје животност произашла слободним развојем мреже и спонтаним издвајањем концентратора. Показаће се да исту форму следи и *Нешов еквилибријум*.

То је теорија Џона Неша, америчког математичара и добитника Нобелове награде за економију (1994), познатог из биографског филма „Бриљантни ум“ и улози Расела Кроуа. Он је радио на равнотежама у играма, местима такмичара у којима поједини учесник не може остварити предност излазећи из групе. Типичним за тимски рад. У основи је математички модел, па је зато и широко применљив.

Слободно тржиште гради Нешове еквилибријуме попут вртлога из којих се фирме у борби за профит не могу лако извући. Економија је динамична, па њена привлачна места временом слабе до потпуног краха учесника или до стварања критичне масе вољне да пређу на боље. Настају кризе капитала које је открио *Карл Маркс* називајући их преласцима квантитета у квалитет. Сада их гледамо као спонтану организацију, ефикасност мреже и штедњу информације.

Комунисти су покушавали да избегну слободно тржиште етатистичком економијом (државно вођеном) компромисима жељеног и могућег, дакле губитком дела од оба, што је водило познатом заостајању. Тек од недавно, након појаве наизглед неспојивих модела, Барабашијевог и Нешовог, можемо даље разумети да повезнице чворова мреже и стратегије игре имају заједничку форму, а затим зашто и како су њихове ефикасности усклађене.

Заједничко овим случајевима је штедња интеракција и бежање од једнакости. Пустимо ли природи на вољу радиће нам што нам се неће допадати, пркосиће нашим идеологијама и иритирати нас да је сменимо са дужности. *Равноправност* кошта, а у том трошку је и пад ефикасности, па имамо све више правника, све више државних регулатива, све мање слобода и увек превише грешака и злоупотреба права све док имамо чиме да плаћамо догму.

Зато што желимо да верујемо да идеја равноправности није контрадикторна или да се равноправности може прилазити све ближе (што је исто), а ради оправдања рада наших законодаваца, природи би боље било да постоје једнаке особе или бар једнаки

услови. Јер ми смо ту да се она пред нама склања!

11. април 2019.

1.7 Данинг-Кругеров ефекат

Данинг-Кругеров ефекат је когнитивна предрасуда у области психологије према којој људи нижих способности имају илузију супериорности и погрешно вреднују да су паметнији и способнији него што јесу.

Дарвин (Charles Darwin, 1809-1882) једном је записао: „Незнање чешће рађа самопоуздање од знања“. Због те комбинације слабе самосвести и ниске когнитивне способности која води до прецењивања себе, *Расел* (Bertrand Russell, 1872-1970) рекао је да је проблем овога света у томе што паметни у све сумњају, а глупани све знају.

Приликом истраживања овог ефекта који је по њима назван, Данинг и Кругер су поред осталог (1999) замолили испитанике да вреднују различите шале, своје и туђе. Некомпетентни људи, показало се, нису само лоши извођачи, него су били и мање способни да препознају квалитет свога рада у односу на друге. Није необично да ученици који су били лошији на испиту осећају да су „заслужили“ бољу оцену.

Сагледајмо сада ову појаву са становишта теорије информације уопште у колективима (људи, живих и неживих бића, случајних догађаја). Масу равноправних јединки видимо као аморфан безличан скуп, максималне ентропије (нереда) за који можемо додати да има најмању могућу емисију информације ка вањском свету и у том смислу најбоље је „феминизиран“ (окренут себи). Редукцију вањске комуникације једноставно назовимо мањом „памећу“ групе равноправних која би таква морала бити мања од просечне „памети“ својих јединки. То заглупљивање индивидуа у маси примењено на жива бића значи да Д-К ефекат не долази од мање интелигенције (IQ) испитаника, него од њихове равноправности!

Памет масе могуће је констатовати референдумским питањима на сличним тестовима као и памет појединаца, а добијени резултат треба разликовати од других способности, рецимо да њих више ураде више посла. Не сумњам да би такво мерење потврдило аналогију из теорије информације – закључак да је маса равноправних мање ефикасна од неравноправних, од хијерархије, наравно, у односу на вањски свет.

Та ефикасност може се дефинисати као сигурносна, економска или нека трећа из теорије игара, свеједно је. У сваком случају, ефикасност је вишак емисије информације[1] ка вани (изван колектива), што заправо значи губитак информације, трошак, јер информација попут енергије мења облике (кинетичка, потенцијална, топлотна, хемијска), али не и укупну количину. Информација је мера (променљивих) података.

Губитак информације у ефикасности огледа се у смањењу спобности комуникације јединки, ограничењу њиховог владања опцијама, смањењу индивидуалних слобода у корист одржавања ефикасности колектива, затим временом у заостајању колектива у променама, односно његовом застаревању у односу на вањски свет. Да је последица ефикасности мањак развојности – ретко је познато. На једној страни су мноштво опција, слобода и развојност, а на супротној су сигурност и друге ефикасности, а друштва у складном развоју теже оптимумима ових супротности.

Оно што се о Д-К ефекту такође не наводи у књигама психологије је разумевање његовог изостајања. То су ситуације јединки у хијерархијама. Ако се и ово потврди

[1] Није познато у теорији игара, за сада.

(неким будућим мерењем), онда је основано рећи да је за тимски рад ефикасније бирати појединце различитих специјалности. Исто долази и из тезе да природа „не воли“ равноправност, а обоје из „принципа информације“ – да природа шкртари са емисијом информације, односно да радије реализује више вероватне догађаје (који су мање информативни).

Према томе, погрешно је процењивати људе са вишком самопоуздања као некакве глупане. Њихову појаву треба посматрати шире – као успех демократије у којој они живе.

18. априла 2019.

1.8 Апатија посматрача

Апатија посматрача (или ефекат посматрача) јесте социјална и психолошка појава у којој појединци у присуству веће групе показују мањи интерес да помогну жртви немилог догађаја. Што је више посматрача, мања је шанса да ће неко интервенисати.

Ту је појаву открио амерички психолог Џон Дарли објављујући један прилог у Њујорк Тајмсу 1964. године о убиству 28-годишњег младића Китија Ђеновеза тврдећи да је 38 сведока посматрало напад, али нико од њих није позвао полицију нити је понудио помоћ. Много је стручних књига од тада написано о „Ђеновезе синдрому“, али верујем не много о ономе оно што ћу вам сада испричати.

Принцип најмањег дејства (производ енергије и времена) једна је од основних алатки теоријске физике. Међутим, колико год она била непогрешива у предвиђању трајекторија кретања супстанце, како у класичној физици тако и у релативистичкој или квантној, увек је упорно остајала без шире примене изван науке. Све до данас.

Ако знамо да је физичка информација израз (еквивалент) физичког дејства, тај принцип минимализма постаје и *начело шкртости* информације, њеног неразметања. Суздржаност у комуникацији влада свуда око нас – од преламања светлости по путањи најкраћег трајања, преко падања тела у гравитационом пољу путањама најмање потрошње енергије, па до спонтаних процеса „феминизације“, односно тежње физичког система да смањи „уређивање“ вањског света на уштрб свог. „Ђеновезе синдром“ је, једноставно речено, последица таквих процеса. Ево како.

Штедећи, материја се може груписати и стварати вишкове дејства (немире) и вишкове информације (живот), па и више од тога. Жива бића се тако даље организују и у сложеније системе, у још више нивое живота, несебично предајући своје делове информације (степене слободе) или дејства заједничком поретку. Такође спонтано постајемо ћелије неког ткива наше будуће све сложеније организације, еволуцијом формално сличном многим другим живим ткивима: по универзалности у рођењу (штедња начина комуникације), по специјализацији у зрелом добу (штедња начина дејства), по паду слободе (штедња информације), паду интелигенције (штедња комуникације) и способности репродукције (штедња дејства).

„Ђеновезе синдром“, доследно томе, представља предају себе, уградњу својих вишкова у вишу хијерархију. Што се нас данас тиче, то је пре свега правни систем. Људи адаптацијом на сопствени друштвени поредак постају мање склони личним иницијативама изван и све више вољни да се за решавање проблема ослањају на систем. Развијајући се таквим токовима, покрета и појединаца, све мање тога видимо у личној одговорности, а све више у законодавству (не идем даље да не бих полемисао са политиком). Када

верујемо у систем, онда нам окружење попут касарне постаје идеал и онда заиста слаби „ефекат посматрача“.

Другим речима, појединци уређеног друштва препуштени ситуацијама равноправности постају блокирани. Њихова апатија је потврда напредне демократије у којој живе и њихове вере у правни систем. Ако је ова теза тачна, онда ће испитаници убеђени да је систем „вредност“ и доведени у услове једнакости показати већу апатију посматрача. То је могуће тестирати рецимо код анонимних путника у аутобусу, пролазника на улици, гледалаца у позоришту.

Важи и обрнуто. Ако не желите да инцидент анонимни посматрају апатично, нарушите равноправност, произведите хијерархију намећући себе привремено за лидера. Одлучно преузмите иницијативу у запаљеном позоришту, командујући поретком напуштања просторије и спасићете многе. У случају агресије на пролазника храбро викните „Људи, он/она напада ту особу! Зовите полицију!“ и нови ауторитет покренуће публику. Сетите се да Наполеон није био физички јачи од својих војника, али имао је способност доминације и постајао би мајстор претварања апатије у убојито оруђе и оружје.

У случају када нисте у мноштву, шансе за деловање су вам утолико веће што вам се ослањање на систем чини даље.

25. априла 2019.

1.9 Диктатура

Највећи проблем са диктаторима је што нису у стању да виде корист од истине и слободе. Понесени ентузијазмом који долази са редом, па онда и због предрасуда, они превиђају наилазак застаревања.

По овој одредници *диктатуре* су утегнута друштва која прво убрзавају, а затим успоравају, као на пример недавни *фашизам* у којем је држава била прокламовани господар, а не слуга народа. Или *комунизам* (диктатура пролетеријата), а сутра можда *либерализам* због своје основе у потреби да преузима права појединаца у име њихове наводне слободе.

Да смо ми пчеле или да имамо плићу памет, мање перцепције, скромнију радозналост и слабије нагоне за развојем, могли бисмо се стотинама милиона година рађати и умирати простији, под условом да ресурси трају. Еволуција не стоји и полако бисмо се адаптирали на смањен број компликација. То се у природи стално дешава, а развој интелигенције толико је невероватан чин – ми смо један од небројено милиона пропалих процеса – да истрчавање наше врсте у том смеру доводи у оправдану сумњу неке поставке биологије, њена принципијелна питања.

„Боља теорија даје бољи смисао чињеницама“ – мото је којим редефинишемо природне појаве. Тако овде прво прогласимо да постоје *избори* и да је могуће *доносити одлуке*. Затим, нека је *интелигенција* способност контроле опција, а *слобода* њихова количина слично класичној информацији. Са тиме смо на терену математике где има више истина него што их је могуће замислити и то је већ први нерешив проблем диктатуре која би да не заостаје. Нема најбољег критеријума (*Аровљева теорема*), нема истине свих истина (*Геделова теорема*), нема скупа свих скупова (*Раселов парадокс*). Математички засноване теорије праве непремостиве препреке са којима нема компромиса, али заузврат оне нам омогућавају релативно лако и неограничено надовезивање тачних конструкција. Наглашавају нам и тешкоће и јасноће.

Са друге стране, претпоставка да верујемо физичким експериментима води закључку да информација не настаје ни из чега и да ни у шта не може нестати. Она пластично, попут енергије, мења облике и задржава количину. Перцепције су тада не само интеракције него и комуникације, а информација, слобода, дејство и истина – еквиваленти су. То је чудно, али згодна страна магије физике јесте да су њене појаве, за које важи закон одржања (енергија, маса, моменти, спин), добрим делом узајамно преписиве.

На пример – аналогно повећању притиска смањењем гуране површине, штедња личног дејства на једној ствари оставља га више за нешто друго. Менаџеру који се држи једноставних дневних рутина преостаје више креативности у важнијем послу, што је такође шанса и за мање паметне који обично боље подносе ограничења.

Свака акција слободе (перцепција) има своју реакцију у некој препреци (окружења) и обрнуто, а укупна слобода је резултат сучељавања (многих) могућности и ускраћивања. Ово подстиче ентузијазам некима жељнима слободе који у ограничењима диктатуре виде ослобађања, али дуално и понекима које отворене могућности плаше. Слобода је овде укупна *информација перцепције* која је збир производа способности јединке и одговарајућих спутавања околине.

Не улазећи у алгебру, могуће је осетити да нам управо норме апсурдно и дефинишу хтења и значе мањак слободе, а за ово друго само кажемо – јер су материјалне опције потрошиве. Суштина слободе су те могућности, а оне су неизвесности ових оригиналности. Бит свих њих је непредвидивост.

Нема истинских открића на зацртаним стазама, па је поредак кочница креативности. Оно што памет законодавца може осмислити као правила игре у привреди, школству, ходању улицом, увек је преуско за неког генијалца који би се тамо могао појавити. Неког од оних ретких који стварају ново, нечега најпотребнијег диктатури.

Попут брода којег јаки мотори гурају по зацртаном правцу и који сигурно и ефикасно следи маршруту, тако и диктатура у најбољем издању води своје путнике у извесност, игноришући штошта можда и боље успут. Слепило на развој једна је цена претераних ограничења, а друга је заглупљивање, јер се ми као врста такође прилагођавамо. Када еволуирамо у једном правцу, закржљавамо у неком другом смислу – проклетство је добре утегнутости, јер је смерова развоја увек превише.

Тако разумемо да је велики проблем диктатура и њихово спутавање наше мисије да будемо људи. Да останемо радознала и интелигентна врста на овој планети.

3. маја 2019.

1.10 Злочин и казна

Нема ваљаних доказа да продужавање законских *казни* смањује проценат *криминала* у друштву. Додатно, познато је да засићеност друштва законима смањује шансе развоју, па се намеће питање зашто тежимо све строжим и све гушћим законима? Зашто у наводној борби за правду ватру гасимо уљем?

Шта ће бити сада, питали су ме пре пар година поводом предлога *Закона* о породичном насиљу[2]. Закон ће изаћи и повећаће се насиље (можда и значајно), а онда ће то бити прилика за даља заоштравања казнене политике. Данас знамо да су се сва ова три предвиђања потврдила, али да исти аргументи нису добили на популарности. Већа

[2]Сл. гласник РС, бр. 94/2016.

претња *затвором* провоцираће већи афекат, али и приближаваће *убиство* његовом наводном разрешењу: боље ми је да је одробијам мртву, него да ми се смеје док ја робијам. Иза те лабаве интерпретације, наравно, стоје дубљи разлози.

Бројне су статистичке потврде, друга експериментална истраживања, али и неки ставови *теорије игара*[3] којима се доказују да није тачан „рационални закључак“ да већа казна води мањем криминалу. Због тога што прецизна анализа тражи паметног и објективног саговорника схватамо да наши захтеви за „више реда“ не долазе из научне трезвености.

Слично се понавило и са мојом недавном критиком тзв. Тијаниног закона[4], сада већ изгласаног у Скупштини Србије (21. 5. 2019), а можда ускоро имитираног и у Републици Српској. Држава не сме да се бави одмаздом, наводим, па се онда из законодавства као и из истраге или судских одлука морају искључивати лично заинтересоване особе. Међутим, уместо изузећа у имплементацији Тијаниног закона лично заинтересована лица добила су главну улогу. Штавише, са око 160.000 потписника петицијом грађани су „хватани на фору“ (ко ће рећи да је против „заштите“ деце), на начин како би се могли издрамчити многи други закони, а то је онда даље сматрано политички коректним.

Паду кредибилитета законодавства увек прете политичке манипулације. Оне се у овом случају откривају у званичној подршци позитивних страна новог закона без помињања оних других делова. У кокетирању са емоцијама које нагињу *одмазди*, у схватању да би у случају судара силе и истине истина лако губила. У зебњи да би политичари могли учинити да друге „две ноге“ државе потчине под своју и открићу да је само ствар њихове милости да ли ће то и хтети. У сумњама да они не желе ту врсту *диктатуре* која би неминовно резултирала успоравањем нашег развоја.

Стручни и поштени *правници* признаће да овај закон није сасвим у складу са нашим Уставом или са међународним законодавством, али рецимо да то овде није битно. Са становишта ширих истина небитно је да ли су регулације овакве или онакве, него да ли оне коче креативност друштва. То би требао бити једнако важан приоритет законодавства, упоредив са принципима људских права или поменутим његовим одвајањем од политиканства.

Поштени правници могли би признати да очекивани манијаци, злочинци повратници, почесто и не доспевају у затворе колико у луднице, па Тијанин закон циља (скоро па) у празно, односно да је статистички мање значајан од колатералне штете коју има шансе да направи. Такође, поштено је рећи да законодавство много више греши него што призна да греши и да строгост увећава његову неправедност. Грешке закона погоршава што *способнији* људи, они чија нам је агилност, предузимљивост и досетљивост најпотребнија, чешће упадају у његове откосе као невине жртве правосуђа.

Дакле, опасност за повећање криминала у друштву долази од оних који би га наводно сузбијали, али то није све. Наши *политичари* нису само наши, па зато они и морају да лажу и да манипулишу. Открива их рецимо јачање овлашћења извршитеља, који као да су ту да би дисциплиновали мале неваљале неплатише одузимањем њихове крупне имовине. Али, ћутање власти на вапаје „ситне раје“ која на овај начин тоне дубље у бескућнике баца сумњу на ММФ[5] и његову наслоњеност на крупни капитал. Правимо ли овде тим јакима лакши плен?

[3]Heiko Rauhut: *Higher Punishment, Less Control?* – Experimental Evidence On the Inspection Game; July 20, 2009

[4]Иницијатива за строжије казне убицама деце.

[5]International Monetary Fund – Међународни монетарни фонд.

Утицај крупног капитала има два лица. У тренду је да *богати* буду још богатији, да их је (процентуално) све мање и да имају све више (свега), а да они други буду све слабији и безопаснији. Богати утежу своје хијерархије и правном државом осигуравају и увећавају стечене вредности, али им унутар пука више одговара стање нереда. Тако и они и *сиромашни* који траже одмазду добијају оно за чиме су ишли иако баш то обоје нису желели. Ово је опет интерпретација иза које стоје дубљи разлози.

Наиме, *физичка информација* је истина (није могућа комуникација за коју бисмо доказали да није могућа), дејство (она нас мења, макар инфинитезимално), материја (сва супстанца као луковица састоји се само од информација). Зато што се вероватнији догађаји чешће реализују, а мање су информативни зато важи „принцип минимализма информације“: природа шкртари емисијама информације. Зато нас привлачи лаж (нарочито ако личи на истину), зато важи „принцип најмањег дејства“ свуда у физици (дејство је производ енергије и трајања). Ово друго је опште познато, прво тако-тако, а следеће никако: зато се свемир шири.

Укратко, ми тежимо све гушћим и све строжим законима пре свега због „принципа информације“, али и зато што је информација уједно и неизвесност и агресија. Шкртарење природе информацијом доводи до њене акомулације и стварања живих бића, нас па наших хијерархија, као и до окретања ка себи. Ово окретање у физичком свету разумемо спонтаним растом *ентропије* (грч. *έντροπή* – стид), у друштву то називам *феминизацијом*. Оба су врсте бежања од слободе, од које заправо не можемо побећи, јер овај свет је само од њеног страшног ткива и саздан.

1.11 Јединственост

Физичка супстанца је само оно са чиме можемо на неки начин да интерагујемо. Чак и *тамна материја* свемира по тој дефиницији физичка је супстанца, јер она гравитационо делује на галаксије, на звезде и друга небеска тела, а они делују на нас. Такође, нема дејства без информације, а додатно, оба су *истине* у смислу: није могуће физичко дејство за које бисмо доказали да није могуће.

Одговарам на постављено питање: „Зашто нисмо једнаки?“ у којем се алудира на неправде у свету наводно решиве простим проглашењем *равноправности* свих нас. Апсолвирали смо да нема потпуно истих лица и истих услова и да је зато једнакост немогућ циљ правне доктрине, а онда се од мене очекује да изнесем дубље узроке те неједнакости. Може, кажем, али одговор са становишта данашњих трендова је толико неочекиван да морамо ићи полако, у корацима.

Теореме које откривамо уопште су попут чворова *слободних мрежа*, са малим бројем тзв. *концентратора* који имају велики број повезница насупрот великог броја осталих, а идеја информације, откриће саме теорије, једно је од гушћих места мрежа истина и дедукција. Густи су и поједини њени делови, *принципи информације*: конзервација, минимализам и јединственост, а као што ћу објаснити, последица тако-рећи сва три принципа је одговор на постављено питање.

Први је принцип „конзервације“ који говори о закону одржања (физичке) информације и углавном је познат физици. Ако требам рећи још нешто ново о њему нека то буде да је информација пропорционална (физичком) дејству, а даље знамо да постоји квант дејства (Планкова константа), па је већ због тога информација неуништива. Другачији доказ „конзервације“ је сама комуникација. Зато можемо да комуницирамо јер информација која нам је послана не може тек тако да нестане. Зато морамо да

комуницирамо, додаћу, јер немамо све – јер смо различити.

Други принцип је „минимализам“, директна последица „принципа најмањег дејства“ већ познатог (теоријској) физици. До њега, начелног шкртарења информација, можемо доћи и неспекулативно, помоћу (математичке) теорије вероватноће. Вероватнији догађаји су мање информативни, а такви су и чешћи. Дакле, зато што је већа вест да је човек ујео пса, него вест да је пас ујео човека, знамо да је природа стидљива са емисијом информација. Затим знамо да ће у скупу равноправних исхода поједини имати најмању вероватноћу, па отуда да природа не воли једнакост. Бацање *фер новчића* има већу неизвесност, исход „писмо“ или „глава“ у фер случају је информативнији.

Трећи принцип је „јединственост“. О њему смо најмање разговарали, јер је он понајвише ствар физике. Тај принцип можемо разумети као поопштење тзв. *Маховог принципа*, како је Ајнштајн својевремено по најпознатијем физичару и филозофу 19. века назвао утицај маса целе васионе на воду у лавору који се окреће у односу на те масе. Вода се просипа због центрифугалне силе која настаје релативним кретањем воде у односу на васиону, а обрнуто не би било могуће. Узгред речено, исти експеримент са лавором наводио је и Њутн доказујући „апсолутни простор“.

Аналогно Маховом принципу, нас дефинише наша прошлост. Свака честица од које се састојимо има неку своју историју по којој је једниствена и, тако гледајући, свака честица васионе је *јединствена*. Супстанца се дефинише информацијом, укључујући и информацију о конзервираној информацији о њој. Доследно томе, у чувеном квантномеханичком експерименту *двоструки отвор* догађа се интерференција честица-таласа (сва материја је и таласне природе) кроз два уска прореза, чак и када те честице наилазе једна по једна одвојене дугим периодима времена. Све одговарајуће честице које су икада, од настанка васионе до данас, прошле датим простором – интерферирају са том честицом-таласом сада.

Оно што видимо данас попут је таласа на површини мора који је и *интерференција* свих слојева воде испод. Да природа икако дозвољава једнакост, дозволила би бар ову фантомску једнакост историја бар две честице и поменути експеримент „двоструки отвор“ не би био могућ. Међутим, она ту једнакост не дозвољава нити за било коју честицу истог квантног стања у односу на само четири позната квантна броја. О чему говорим добро знају хемичари који из тог тзв. *Паулијевог принципа забране* изводе од раније познате елементе Мендељејевог периодног система.

1.12 Слободна воља

Ако постоје опције, онда нема *детерминизма* и, према томе, каже се у другом писму, имамо слободну вољу и одговорност за своје поступке? То је било питање колеге који у прихватању случајности види могућност свести да контролише нашу судбину. Али, ствари нису тако једноставне.

Детерминизам је филозофска идеја о догађајима и моралним изборима потпуно одређеним неким претходним узроцима. Он искључује слободну вољу подразумевајући да људи не могу деловати другачије него онако како то чине. Међутим, ако понекад понегде имамо заиста случајне догађаје, онда не стоји идеја детерминизма. Али, опет нисмо слободни да управљамо својом судбином која је тада препуштена неизвесним исходима.

Као да су били свесни овог парадокса, неки древни мислиоци су евентуалне неодређености ограничавали на људе, а њихове контроле приписивали *боговима*. Данас може-

мо отићи мало даље и израчунавњем доћи до још чуднијих закључака.

Знамо да природних бројева има бесконачно, кажемо *пребројиво много.* Једнако бесконачно има и целих бројева, али и разломака. Они чине тзв. *дискретне* (уздржано) бесконачне скупове. За разлику од коначних, бесконачни скупови могу бити количином једнаки свом правом делу. Сходно, све физичке појаве, за које важи закон одржања, коначно су дељиве.

На пример, најмања количина дејства (производа енергије и времена) јесте Планкова константа, а то је и најмања интеракција и, што се мене тиче, најмањи носилац комуникације супстанце. Све узајамне акције и физичке комуникације, као и сви атоми нашег тела, па и васионе, могу се редати у један највише пребројиво бесконачан низ. Због таласне природе (сваке форме) материје, положаје увек можемо бројати неким таласним дужинама, а трајања трептајима, па простор-време било којих датих физичких догађаја стално остаје неки дискретан скуп. Низати се могу и сви програми савремених (класичних) компјутера па, отуда, свака се материјална структура може представити пребројивим, дискретним кодовима.

Насупрот томе, реалних бројева има непребројиво, *континуум много.* Толико је тачака равни, тачака праве, тачака једне дужи, јер и континуум је бесконачност, па може бити једнак свом правом делу. Ирационалних бројева, који у бројевном запису имају бесконачно много непериодичних цифара иза запете, има као и реалних. Саме позиције тих цифара чине низ, али њихове варијације су више од тога. Ова немогућност смештања континуума у дискретум даје нам идеју за дубље схватање наше свести.

Вишезначност наших мисли указује на њихову непребројивост, иако оне увек следе неки (пребројив) низ тренутака. Ако је сама супстанца (бесконачно) дискретна, свет идеја који је објашњава је континуум. Зато тачним клонирањем човека простим копирањем његових атома нећемо пренети и свест; она се не може извести класичним програмирањем него, можда, квантним, јер квантна стања материје су суперпозиције случајности.

Суперпозиција је уопште својство линеарности повезаних појава, када двоструко више једне значи двоструко више друге. Овде посебно сабирамо вероватноће, као када куповином два тикета лотоа удвостручимо шансе за добијање награде. Сваким случајним исходом реализује се информација тачно једнака количини претходне неизвесности, а аналогно кажемо да суперпозиција интеракцијом *колабира* у ново *квантно стање* при чему се не мењају одговарајуће количине. Сваком интеракцијом квантни систем *еволуира* у нову реалност, одустајући од онога што му се тада могло десити и није се десило, а што називам *псеудо-реалностима.* У псеудо-реалностима важе исти закони, али међусобна (физичка) комуникација са таквима није могућа, јер би она нарушила закон одржања информације.

Дакле, квантне суперпозиције чине континуум могућности, мада је број реализованих исхода увек највише пребројиво бесконачан. Наша „слободна воља“ шета континуумом *мултиверзума* идеја, кроз реализоване опције *паралелних реалности* унутар којих важе исти закони физике, а које међусобно не комуницирају, тако да наше физичко тело и сва околна материја стално остају дискретни.

Квантна механика је крајње доследна репрезентација апстрактне алгебре и до сада најтачнија и експериментима најпроверенија грана физике. Можда су управо зато познаваоцима квантне физике тако поражавајућа њена открића, која су више у сферама апстрактног него физикалног. Почев од њених суперпозиција, због којих је Ајнштајн, један од оснивача квантне механике, у неверици говорио да се „добри Бог не коцка“, па до мултиверзума „којем Бог није потребан“ како га критикују модерни

теоретичари теологије, она је упркос своје научне поузданости упорно остајала на граници прихватљивости и помало са оне стране разума.

Када би човек заиста могао бирати своје путеве, са пуном свешћу о тачним последицама, онда би он својим изборима заправо управљао васионом, мењао би читав материјални универзум својим жељама, одлукама и вољом. Питање са почетка је – да ли ми стварно имамо толику моћ?

1.13 Понављања

Како то да су догађаји непоновљиви, а гени нам се *понављају*? Зашто небеска тела круже, а тротоарима ходамо по малобројним шаблонима (које математичари управо откривају), а тврдимо да је материја саздана од огромног броја јединствених интеракција? Зашто политичке странке једног друштва све више личе једна на другу, иако нема једнаких лица нити једнаких услова? То су занимљива питања за теорију информације, ову која претендује да буде општија од класичне, Шенонове.

Информација је истина, она је дејство и интеракција, физичка је ствар и нема је без неизвесности. Супротно уобичајеном веровању да прошлост знамо, а будућности се надамо, видимо само последице, али не и узроке. Тек заменом теза долазимо до „закључка“ да слични догађаји производе сличне последице, а онда због коначне дељивости сваког својства информације, па зато и коначног броја њихових комбинација, изводимо (хипо)тезу да су све, али ама баш све, материјалне појаве *периодичне*.

У крајње једноставним системима попут *фотона* (честица-таласа електромагнетног зрачења и посебно светлости) раст и пад електричног поља у једној равни смењује са порастом и опадањем магнетног поља у окомитој равни, наизменично на горњој и доњој односно левој и десној полуравни путање фотона, док он путује наилазећи стално на друга места и друго време.

Склоност материје за понављањем појачава штедљивост информације. Слично *слободним мрежама* Барабашија, које због ефикасности теже да стварају мали број чворова концентратора са великим бројем спојница мреже, велики системи информација фаворизују малобројне. Таква доминантна „сила“ Римског царства била је његова привлачност која је произилазила из богатства, уређености, сигурности, а из које је ницала јаловост и слабост која се није могла одупирати таласима варвара. Потомке тадашњих дошљака, визигота, данашње напредне западњаке, можда чека слична судбина понављања, успона и пада Римског царства. Историја се, наравно, зна „враћати“ и у краћим циклусима.

Генима на потомке преносимо и особине попут моралних које нису физикалне као што је кромпир, али јесу материјалне и изрази су физичких информација. Оне се такође нужно понављају, у оквиру једне врсте данас али и кроз њихова поколења.

Теорија детерминистичког *хаоса* је нова грана математике инспирисана метерологијом и *рекурзијама* (деловима који понављају целину). Она се бави феноменима малих почетних разлика што ескалирају и која је зато добар тест горњих теза. То је *ефекат лептира* чији покрет крила у Мексику може изазвати ураган у Тексасу или *критична маса* која мања од већине може покренути целину. Како су већ откривене неке хаотичне а периодичне ствари, на пример у понављањима олуја или структуре стабла дрвета у крошњи и листовима и њихове форме су назване *атракторима*, то ми сада само додајмо да ће се и за све остале природне токове пронаћи одговарајући „атрактори“. Због принципа јединствености и коначности информације, њени циклуси и рекурзије

ипак никада нису идентични, него су увек ограничени и међусобно само слични.

Примера периода у локалним успонима и падовима пуне су *економије*. Рецимо, за вашим новим произоводом као монополом потражња може да расте, приходи вам расту, али нови начин зараде привлачан је конкуренцији која вас имитира и понуда расте. Купаца је коначно много, па приходи пролазе свој зенит и почињу да опадају, а то би вас могло мотивисати да неком новом идејом покренете сличан циклус.

Занимљиво је приметити да математичка анализа, која се бави континуумом, дакле бесконачношћу несвојственом супстанци, познаје став, *Фуријеове редове*, да се свака функција може довољно тачно апроксимирати периодичним синусоидама. Штавише, било какав фрагмент неке трајекторије ће корацима са растућом тачношћу, до сваке унапред задате, апроксимирати било коју другу трајекторију (сличну физикалној). Ти ставови нам указују да облик и није битан колико само пуко понављање и они нам, сматрам, говоре о вези материјалног и нематеријалног света истина. Да је први изведив из другога, да је други омотница првога.

Није новост сазнање да има сличних периода материјалних појава, али јесте откриће тврђења о немогућности њиховог непериодичног понашања. Када мало боље размислимо, наилазићемо на принципе информације у разним нашим свакодневним рутинама, њену непредвидљивост и јединственост, њене шкртости и закон одржања.

1.14 Еми Нетер

Има ли жена у математици? Наравно да има. Препричаћу вам једно важно откриће једне од њих, генијалне Еме *Нетер*[6], која је због теореме по њој назване већ врста иконе алгебре и физике, али чији ће значај тек расти, надам се, због теорије информације којом се управо бавим.

Ема је била Немица јеврејског порекла одгајана да буде наставница енглеског и француског језика у школама за девојке, али је уместо тога отишла да студира математику на Универзитету *Ерланген*[7] на којем је радио и њен отац математичар Макс Нетер[8]. Женама је било дозвољено да буду на часовима, али само у присуству инструктора, а њени инструктори данас су на далеко познати теоретичари Давид *Хилберт*[9], Феликс *Клајн*[10], Херман *Минковски*[11] и Карл *Шварцшилд*[12]. Докторирала је 1907. године на алгебарским *инваријантама*.

Начин на који је Ема третирала те инваријанте постао је предмет дивљења прво Хилберта, Клајна и *Ајнштајна*[13], а затим и многих других способних да разумеју Нетерову математику, њој својствену „поезију логичних идеја“. Емин главни рад из 1915. године, који често називамо „најлепшом теоремом на свету“, покушаћу да објасним популарно.

У време када је физика још увек откривала закон одржања енергије, да је збир кинетичке и потенцијалне енергије тела константан (енергије кретања и мировања,

[6] Amalie Emmy Noether (1882-1935), немачка математичарка.
[7] University of Erlangen–Nuremberg
[8] Max Noether (1844-1921), немачки математичар.
[9] David Hilbert (1862-1943), немачки математичар.
[10] Felix Klein (1849-1925), немачки математичар.
[11] Hermann Minkowski (1864-1909), немачки математичар.
[12] Karl Schwarzschild (1873-1916), немачки физичар и астроном.
[13] Albert Einstein (1879-1955), немачки теоријски физичар.

остварене и неостварене), *Ојлер*[14] и *Лагранж*[15] били су километрима испред својих савременика. Они су разматрали разлику кинетичке и потенцијалне енергије коју данас називамо *лагранжијан*. Претпостављали су да се ова разлика у спонтаним ситуацијама временом не мења и 1750. године дошли до парцијалних *диференцијалних* једначина другог реда по њима названих. Лагранж је откривени *принцип најмањег дејства* бриљантно тумачио и 1788. године поставио основе класичне механике.

Ојлер-Лагранжове једначине односе се на било каква кретања, по толико *генералисаним координатама* да оне дају трајекторије од најмање потрошње времена одбијене или преламане светлости између две тачке, преко њихања клатна, вибрирања опруге, па до рецимо путања најмање потрошње енергије у класичној, релативистичкој, а коначно и у квантној физици. Генералисане трајекторије су „путеви“ еволуција физичких система непромењеног лагранжијана које називамо *симетријама* или инваријантама.

Када станете испред огледала и посматрате свој одраз, тада учествујете у раванској симетрији, *рефлексији* у односу на раван огледала. Сваки троугао са својом рефлексијом има једнаке странице, једнаку површину, мада супротну орјентацију. Рефлексија је и осна симетрија у односу на осу, дату праву, или централна симетрија у односу на неку тачку. У исту категорију „непромењивости у оквиру трансформације“ спадају и *транслације*, паралелна померања фигура без нарушавања растојања између унутрашњих тачака. Већ у првим разредима средњих школа, где се уче ове тзв. *изометрије*[16], могли смо научити да *геометрија* нема много симетрија и да се свака од њих може свести на једну или две *ротације* – кружног кретања фигуре око фиксне тачке.

Ема Нетер је приметила да један од два сабирка Ојлер-Лагранжове једначине представља промену лагранжијана (енергије) по генералисаној трајекторији и да та промена у случају симетрије исчезава, те да преостали, други сабирак који представља промену количине одговарајућег физичког система временом такође исчезава. Одлучно је закључила да присуство „непромењивости“ значи неку симетрију, а то конзервацију одговарајуће физичке величине.

Даље је ваљда јасно зашто ће се Нетеровом теоремом одушевити и Ајнштајн који се својевремено мучио са разумевањем инваријантних кретања, инерцијалног једноликоправолинијског и тела у слободном паду у гравитационом пољу, сматрајући да у таквим сви закони физике остају исти. Нетерова теорема гарантује и стабилност гравитационог поља.

У квантној механици познајемо *Хајзенбергове*[17] *релације неодређености* према којима производ неодређености енергије и трајања било каквог реалног физичког процеса, односно честице, не може бити мањи од познате константе (приближно Планкове). Аналогно важи за импулс и дужину. То на начин да за (скоро) свако унапред дато мало трајање можемо увек имати довољно велику енергију и имати физички реалан систем, а то је услов диференцијабилности поменутих једначина. Симетрије квантног света пре свега су *реверзибилности* свих квантних процеса, који се рефлектује око (текуће) садашњости, па то онда некако важи и за макросвет.

Укратко, када год имамо неку непромењивост имамо и одговарајућу постојаност. На пример, вода која се окреће у чаши изгледаће нам стално исто, а то је ротациона симетрија – и имамо ротациони закон одржања (ангуларног момента). Зврк једном покренут наставитиће се окретати све док га нека сила (трење) не заустави. Тело у

[14] Leonhard Euler (1707-1783), швајцарско-руски математичар.
[15] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), италијански математичар и астроном.
[16] Изометрија (izos – исто, metrein – мерење), пресликавање које чува растојање између тачака.
[17] Werner Heisenberg (1901-1976), немачки теоријски физичар.

инерцијалном кретању не мења се и имамо добро познати закон инерције праволинијског кретања. У квантној физици, као што рекох, сви процеси, *еволуције*, описују се регуларним операторима, реверзибилним, што је врста симетрије, па онда и за токове информације важи закон одржања.

Искорачимо на крају мало испред Нетерове теореме и приметимо да бесконачни скупови могу (количином) бити једнаки свом правом потскупу (делу), те да за такве не важи начело конзервације (моја теорема). Другим речима, ако за дато физичко својство важи Нетерова теорема, онда за то својство важи конзервација, а онда је оно и коначно дељиво, у математици кажемо дискретно. Зато су сви облици супстанце атомизирани, квантовани, кварковани, а физичке информације увек су коначно дељиве, кажемо *дискретне*.

Са друге стране, из Ојлер-Лагранжових једначина из изједначавања са нулом оног сабирка који означава промену физичког стања временом следи нулта вредност другог сабирка који тада говори о пристусву симетрије. То је обрнут ток закључка Нетерове, који нам сада на други начин сведочи о *периодичности* материјалних појава о којој смо претходно расправљали.

Слободе, количине опција мерене физичком информацијом, такође су и дискретне и потрошиве. Такве су и наше оригиналности, наша открића, па према томе и развојност друштва. Када бисмо законска органичења мерили аналогно, исто би важило за правосудни систем, а то је доследно теорији информације коју вам објашњавам. Тиме стижемо на корак од теорије игара, такође важног дела „информатике“, али о којој ћу тек причати.

Дакле, има жена у математици и њихов допринос није спорадичан. Оне су се додуше ређе појављивале али су знале јако обасјавати.

1.15 Игре равнотеже

Теорија информације којом се бавим је математика избора. Теорија игара је математика одлучивања. Када их поставимо овако једну поред друге, показаће се да су то две сродне области са много тога заједничког. Теорија игара настала је 1928. године када је Џон фон *Нојман*[18] открио *минимакс теорему.* Доказ те теореме ћу сада покушати препричати, али треба знати да је он у оригиналу веома тежак и да се вреди потрудити разумети га макар делимично, јер је та прича веома апстрактна и зато веома универзална. Укапирате ли и један њен делић, видећете његове одразе на многим местима око себе!

Замислимо да имамо играча који има више могућности, тактика или стратегија, од којих свака има неки најлошији исход. Претпоставимо да опонент (једна особа или више њих) може (са неком вероватноћом) препознавати најлошије исходе. Тада је за играча најбоље да се одлучи за стратегију са најповољнијим од за њега најнеповољнијих исхода. То је нека вредност, његов „максмин“. Обрнуто, симетрично ради и опонент. Он се одлучује за своју стратегију и сопствени оптимални „минмакс“ скор.

Када би једна од вредности, максмин или минимакс, била боља од друге, онда би та страна побеђивала без обзира на беспрекорну игру противника. Таква ига била би нефер, а познаваоцима досадна и тако рећи бесмислена. Напротив, ако су вредности максмин и минимакс једнаке, онда је игра фер, има симетрију, кажемо да је у равнотежи. Исход је неизвестан и игра у правом смислу може да траје.

[18] John von Neumann (1903-1957), мађарско-амерички математичар.

Том великом открићу фон Нојмана сада додајмо теорему Еме *Нетер*, да за симетричан систем важи одговарајући закон одржања, конзервације количине, током других промена. Затим узмимо у обзир и (моје недавно) откриће да својство за које важи закон одржања мора бити дискретно. Закључак је да игре равнотеже (када су максмин и минмакс једнаки) морају бити *дискретне*. Чак и када нам оне на први поглед изгледају аналогне (континуалне) оне заправо у неком свом микросвету имају јасно одвојене потезе. Зато су све физичке информације дискретне, слободе су дискретне, забране слобода су дискретне, не само правне забране, него и све које имамо од непосредних природних закона дискретне су.

Ово последње је чудно, јер минимакс теорема претпоставља да се стратегије дефинишу на *компактним скуповима* вредности, што значи затвореним доменима, оним који садрже све своје граничне вредности. Међутим, физички простор због Хајзенбергових релација неодређености јесте „једва“ такав, јер се он може делити произвољном али унапред датом поделом до инфинитезималне. Даље следи да су размене информација у физичком свету увек у равнотежи.

Није могуће предати информацију од нечега ничему и није могуће кретање фотона кроз *вакуум* без комуникације. Наиме, када вакуум комуникацијом не би одузимао информацију фотону, информација фотона би неограничено расла бар за „информацију о његовој прошлој информацији“. Зато физичку реалност треба разумети као непрестано надигравање физикалног, при чему се све „партије“ супстанце одигравају (вишеструко) увек у дискретним потезима и у сталним Нојмановим равнотежама. Тврдња да је предата информација једнака добијеној изражава закон одржања физичке информације. Уједно, физичка комуникација је и физичко дејство.

Са законом одржања енергије горњим питањем стижемо до сумње у причу да ће „све опет доћи на своје”, јер енергија је рад силе на путу, а сила има моћ да може да мења ствари. Тело бачено увис можда се враћа нама, на свој „пут истине“, али силе знају стварати и поремећаје који одоше предалеко. Константе у тим дејствима су, парафразирам, да су и највеће олује на мору само неке од *игара равнотеже* природе и да се у тим „потезима игре“ природе увек размењују једино истине.

Играчи који се надмећу због победе имају жељу за победом, иницијативу и лукавост, а вероватније побеђује она страна која супротну доведе у *дефетизам* и у тој мери оствари своју *агресивност*, односно она која из насумичне игре извуче више информације, односно *дејства тактике*. Теорија игара даље је преопширна за овако кратак текст, па и за сваку од поменутих назнака те теорије.

Природа тежи неделовању, путем *принципа најмањег дејства* теоријске физике, односно путем *принципа најмање информације*, јер у њој не постоји ништа што нема дејство, информацију или истину (то су синоними). Не постоји ни најмањи део природе без агресије, а опет она као да жали због тога.

1.16 Парондов парадокс

Понекад комбиновањем губитничких можемо добити добитничке процесе. То је парадокс теорије игара који је открио шпански физичар Хуан Парондо 1996. године. *Парондов парадокс* ћу искористити за одговор на недавно постављено питање: Постоји ли нека дубља веза између *теорије информације* и *теорије игара*, односно њих и обичног живог света?

Дефинишимо две просте губитничке игре и помоћу њих формирајмо трећу добитни-

чку, а затим приметимо да сличне сложене игре природа игра око нас стално. Затим то повежимо са принципима минимализма информације и дејства, уз напомену да нису све игре на победу.

Замислимо прву игру тако да наш играч у сваком потезу безусловно губи један евро. Просто тако. Ако он на почетку игре има сто евра, након сто потеза неће их имати. Јасно је да је то губитничка игра, а њена једноставност нам олакшава даљу причу. Нека се у другој игри броји колико новца играч има. Ако је број паран, додају му се три евра, а ако је непаран, одузме му се пет евра. Није тешко приметити да је и то игра сама за себе губитничка. Током два узастопна потеза играч губи два евра (заради три и изгуби пет), па почетних сто евра такође изгуби у сто потеза.

Договоримо се даље да наш играч наизменично игра другу па прву игру. У том комбиновању са почетних парних 100 евра он је у другој игри и зарађује три евра, па се подиже на непарних 103 евра, затим у првој игри губи један евро и пада на парних 102 евра. Он поново игра другу игру и увећава зараду за три евра на непарних 105 да би у првој изгубио један и стао на парних 104 евра. У свака два узастопна потеза он је богатији за два евра.

Надам се да вас не замара ово додавање три евра и одузимање једног током два потеза и да можете приметити да је наш играч на тај начин сваки пут богатији за два евра. Он је након таквог пара потеза увек на парном броју зараде, па стално добија. Чисто добитничка игра наизменичним заменама две чисто губитничке игре. То је апстрактан пример поменутог парадокса теорије игара, али олакшава разумевање обећаног одговора.

Прву игру препознајемо у стањима уређености, у стабилности, сигурности и ефикасности рецимо предузећа или друштва (гледано дугорочно). Боља организација, продорнија хијерархија може значити већу тренутну успешност предузећа у конкуренцији, али већа стабилност је углавном и већа статичност, а она временом узрок заостајања у односу на променљиву околину, у односу на неке „остале“ који се појављују и чији значај временом расте.

Другу игру дефинишимо као брзоплете иновације, претерано убрзане, а не рецимо у периодима од четири године које би предузеће могло коштати, али и које би било могуће експлоатисати. Та журба због вишка трошкова и мањка прихода довешће фирму у губитке. Насупрот журби друге игре и сталном успоравању прве игре, њихова комбинација, иновација са периодима експлоатације од две губитничке начинила би победничку трећу игру.

Насумично повлачење потеза произвољне игре, које обично не води добитку, дефинишимо као *нулто стање* дате игре, а разлику мајсторства и насумичности упоредимо са физичком информацијом. Она постаје мера *дејства тактике*, нивоа мајсторства, јер је свака физичка информација неко физичко дејство (енергија у трајању). Дефиниција такве мере вреди и у играма на равнотежу, где сви добијају или сви губе, јер је насумичност универзално „нулто стање“.

Последица нове дефиниције тактике је, на пример, другачије гледање на агресију као на позитивну иницијативу – до оптимума својствених информацијама. Наиме, због објективности неизвесности каква-таква емисија информације је неизбежна, али због шкртарења емисијама информације оне имају своје *оптимуме*. У теорији вероватноће неизвесност је тема, а принцип шкртарења видимо у чешћем реализовању вероватнијих догађаја (који су мање информативни). У физици, где су микро-дејства стална појава и није их могуће искоренити, принцип шкртости видимо у потреби за силом да се деси макро-дејство што је неспонтана ствар.

Аналогно, иницијатива једног предузећа у конкуренцији другом сада значи претњу, *акцију*, која тражи *реакцију* без које се првом олакшава победа. Сада изостанак супротстављања повећава шансе за пораз, а то није било толико експлицитно у класичној теорији. Сличан пример је и окупатор који долази на нову територију и којем може бити у интересу да се понаша делимично пријатељски, а делимично агресивно преузимајући све више од домаћина. То је још јаснији пример оптималности.

Парондов парадокс огледа се на још један начин, опет у *дуалностима* које произилазе из *принципа минимализма* (информације и дејства). Сада знамо да природа не воли претеране емисије информације аналогно спонтаном кретању тела по трајекторијама са минималном потрошњом енергије и времена, а даље приметимо да из те штедљивости произилази и њена способност акумулације. Нагомилавање подстиче еволуцију живих бића, а сам живот разапет је између цурења и стицања информације, односно дејства. Можемо рећи да живи и неживи свет заробљавају такви токови, са стражарима поменутим принципима.

Према томе и живот нас обичних смртника је „игра информације“. Били ми тога свесни или не, везе надметања и комуникације чине нас.

1.17 Термодинамика

Реч *ентропија* (грч. *ἐντροπή* – обрт ка унутра) 1865. године увео у физику је немачки математичар *Клаузијус* (Rudolf Clausius, 1822-1888). Он је анализирао *Карноов циклус* (Sadi Carnot, 1796-1832), француског официра, инжењера и физичара чијим делом је заснована *термодинамика*. Циклус Карноа је теоријски физички процес који посматра кружне промене температуре и притиска флуида у затвореном термичком систему. Идеју ентропије је даље развио *Болцман* (Ludwig Boltzmann, 1844-1906) интерпретирајући је 1870. године у статистичкој механици као меру *неизвесности*, при томе следећи радове америчког научника *Гибса* (Willard Gibbs, 1839-1903) заслужног за трансформацију физичке хемије у ригорозну индуктивну науку.

Карно је осмислио идеалну топлотну машину, термодинамички циклус максималне ефикасности, са циклусом у четири такта. Први је изотермно (константне температуре) сабијање флуида (течности или гаса), па адијабатско (без промене топлоте) сабијање, затим изотермно ширење и четврти такт је адијабатско ширење. Адијабатски процеси се реално не могу постићи, јер макар мала размена топлоте (топлотне енергије) са спољашњом средином мора постојати, па се са сваким оваквим циклусом неповратно губи део енергије система.

Не само у замишљеним идеалним условима, оптималан *рад* топлотне машине

$$W = Q_2 - Q_1 \tag{1.1}$$

разлика је највеће (Q_2) и најмање (Q_1) топлоте флуида у стањима, редом, највеће (T_2) и најмање (T_1) температуре. Специфична промена ($\Delta T = T_2 - T_1$) температуре у та два екстремна стања замишљеног циклуса

$$\eta_0 = \frac{\Delta T}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}, \tag{1.2}$$

назива се Карноова ефикасност. *Келвин* (Lord Kelvin, 1824-1907) је својим радовима показао да је максимални рад који топлотна машина може произвести производ тог

коефицијента (η_0) и највеће топлоте (Q_2) флуида

$$W = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q_2, \tag{1.3}$$

а отуда, изједначавањем (1.1) и (1.3), Клаузијус је нашао

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0, \tag{1.4}$$

дакле да су у идеалном процесу топлота и температура директно пропорционалне. Ентропијом је назвао количник топлоте и температуре

$$S_i = \frac{Q_i}{T_i}, \quad i = 1, 2 \tag{1.5}$$

који је у идеалним условима константан ($S_2 - S_1 = 0$).

У реалним условима оптималан рад топлотне машине мањи је од замишљеног

$$Q_2 - Q_1 < \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q_2, \tag{1.6}$$

а отуда, редом:

$$\frac{T_1}{T_2} Q_2 < Q_1, \tag{1.7}$$

више топлоте се преда хладном резервоару него у Карноовом циклусу и

$$S_2 < S_1, \tag{1.8}$$

ентропија која напушта систем већа је од оне која остаје. Клаузијусова ентропија у реалним условима спонтано расте.

То је историјски осврт. За Клаузијуса је ентропија била само количник, згодна смена у његовој математичкој анализи Карноовог циклуса. Па ипак дао је назив за ентропију (окретање ка унутра) алудирајући на „нешто“ што остаје и повећава се док енергија цури напоље, што је временом добијало већи смисао.

1.18 Статистика механике

Болцман је у развој идеје ентропије увео хипотезу елементарних честица, атома и молекула, које се брзо крећу око својих тежишта, вибрирајући одгурујући једне друге и ширећи флуид колико посуда дозвољава, заузимајући равномерне међусобне положаје. Приметио је да за једнолик распоред микростања (куглица у кутије) има више могућности од сваког неједноликог распоређивања и претпостављајући да су све поједине комбинације равноправне нашао је да су оне равномерне највероватније. Логаритам броја тих распореда Болцман је препознао као Гибсову *неизвесност*, а њене промене у термодинамичком кружном процесу као промене Клаузијусових количника топлоте и температуре. Данас га у науци углавном памтимо по том логаритму броја термодинамичких микростања који називамо Болцмановом ентропијом или као једног од најважнијих оснивача статистичке механике.

У *идеалном* кружном циклусу топлотне машине, колико пута се смањи *топлота* толико пута се смањи *температура* флуида, јер је њихов количник константна ентропија, али и обрнуто, када се повећава топлота сразмерно се повећа и температура.

У реалном циклусу имамо губитке енергије *осциловања молекула* преносом њихових виших осцилација на ниже осцилације хладнијих зидова посуде. Доследно повећању Клаузијусове ентропије, количнике топлоте и температуре (1.5), то је пад температуре више него као пад топлоте. Поред кинетичке енергије молекула, иначе једине у идеалном циклусу, у реалном постоји и потенцијална енергија веза између молекула, дакле укупно мање доминантна у односу на пад температуре. Поновићу, топлотна енергија (бројник) циклуса опада, али Клаузијусова ентропија (количник) расте зато што температура (називник) опада брже.

Размотримо исто са становишта закона одржања информације. Замислимо већи систем са околином око поменутог циклуса тако да је укупна информација затворена. Укупна информација је константна, па колико се унутрашња повећа (ред) за толико се вањска смањи (неред).

То је такође новина овог текста. Извана гледајући унутрашњи уједначен распоред сматрамо безличним, аморфним, мање информативним, што доживљавамо као одсуство реда, па повећање ентропије опажамо као повећање нереда. Оно иде на уштрб веће унутрашње уређености система! Молекуле унутар кружног циклуса уређују се попут постројавања војника или једнолико слагања куглица у кутије.

Објашњење укупне информације, унутрашње и вањске, чак да пре и после процеса није исто, не нарушава усклађеност Болцмановог статистичког објашњење ентропије са Клаузијусовом дефиницијом. Међутим, верујем да је оно тачно и да ће се то одразити у даљој примени ентропије. Осврнућу се овде само на теорију релативности, посебно специјалну.

Систем координата K' креће се једноликом брзином v у односу на координате K. У сваком од два система мирује по један сопствени (својствени) посматрач тог система и опажа оног другога у релативном кретању. Сразмерно Лоренцовом коефицијенту

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.9}$$

где је $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s брзина светлости у вакууму, расте релативна енергија, релативно време успорава, а релативне дужине у правцу кретања скраћују се.

На пример, ако је сопствена енергија E_0 (опажена у мировању), онда релативна (опажена у кретању) износи

$$E = \gamma E_0 \approx E_0 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = E_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 = E_p + E_k, \tag{1.10}$$

где је $m_0 = E_0/c^2$ сопствена маса (у мировању), а $E_p = E_0$ и $E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$ су редом потенцијална и кинетичка енергија датог тела. Лоренцов коефицијент (1.9), узет као функција количника брзина ($v^2/c^2 \to 0$) развијен је у ред и занемарени су сабирци већих степена тог количника, јер посматрамо случај брзина v занемарљивих у односу на брзину светлости c.

Показује се да „укупна енергија“ E кретањем расте због пораста кинетичке енергије, што нам даје за право да (хипотетички) претпоставимо да се топлотна енергија у Клаузијусовој ентропији (1.5) кретањем не мења, $Q = Q_0$. Штавише, у складу са горњим објашњењем „цурења осцилација“ из посуде циклуса ка хладнијим зидовима, додајемо и претпоставку да се повећањем енергије осцилација повећава релативна температура датог тела $T = \gamma T_0$, па долазимо до закључка да је релативна ентропија мања од сопствене ($S < S_0$), тачније да је $S = S_0/\gamma$.

Овакве интерпретације јесу необичне, али нису противречне. Оне се од недавно појављују у сличном облику и код других аутора (в. [4]) и, наравно, у мојим претходним радовима (в. [6]).

Повећање температуре може се „бранити“ Доплеровим ефектом, који у специјалној теорији релативности има и трансферзални пораст релативних таласних дужина. Оне су једнаке средњој вредности (аритметичкој средини) релативних таласних дужина долазећег и одлазећег извора и пропорционалне Лоренцовом коефицијенту (1.9). То је лако проверити, па овде не понављам.

Последица мање релативне ентропије од сопствене је *закон инерције*. Тело неће спонтано прећи из стања веће у стање мање ентропије па зато остаје у стању релативног мировања и не прелази у покретни систем. Оно релативну ентропију види мањом и у Болцмановом смислу, јер контракција само по правцу кретања а не и окомито на тај правац ремети хомогеност.

Слично је опажање мање релативне ентропије и у гравитационом пољу са становишта бестежинског стања сателита у слободном паду који се креће геодезијским линијама. У просторији која мирује у односу на гравитационо поље, ниже молекуле ваздуха гушће су због привлачне гравитационе силе, што ће створити утисак *поремећаја хомогености* и смањења ентропије. Зато тело у слободном паду не напушта своју путању, јер би спонтано прешло из више на нижу ентропију. То је у складу и са Доплеровим ефектом опште теорије релативности.

Резимирајмо. Наглим заустављањем, у тренутку судара са препреком, температура тела је као и непосредно пре судара, кинетичка енергија прелази у топлотну и расте ентропија тела. Чаша у лету тек када удари у препреку разбија се сагласно повећању нереда због повећања ентропије.

Glava 2

Формализам

Овде смо на терену математике, математичке теорије физичке информације. Претпоставићемо да је класична теорија информације добро заснована и у наставку одвојити и нагласити неке случајеве расподела које се могу парцелисати на адитивне делове. Ти ће делови имати информацију која простим сабирањем даје „физичку информацију“ већих целина, а која више није Шенонове форме, иако је можда на почетку то била. Није могуће такво разлагање сваког информативног система, јер није сваки разградив на независне целине, а ни *континуум* није физичка ствар. То су смернице. Овде су само неке расподеле вероватноћа као почетак и модел будуће теорије.

Окосница свега је Хартлијева информација, таква каква јесте, а затим тражење израза физичке информације што је могуће ближих Шеноновој дефиницији. Оно што је био циљ је информација као адитивна функција расподела независних вероватноћа сличне форме. То је идеја која би била у складу са законом одржања, а као што ћете видети, елаборирана је у случају добро познате биномне расподеле и неколико мање популарних њој сличних. Индикатори и слободан ход теорије вероватноће, овде обрађени, нису новост, али сам толико брзо прелазио на непознате ставове, па их поврх свега и „сувишно“ доказивао на различите начине, да ће текст можда бити напоран и математичарима. Зато га нема много.

Са друге стране, сама тема је непопуларна. Сада је у тренду *ентропију* не сматрати информацијом, што има своје јаке разлоге и можда несразмерно многобројне следбенике. Рецимо, логаритам броја једнаких распореда микростања термодинамике (Болцманова формула ентропије) расте са бројем микростања и опада са вероватноћом једног, па кажу, спонтани раст ентропије еквивалент је чешћем дешавању мање вероватних стања. То наравно није тачно, али није тачна ни претпоставка те дедукције, јер су „једнаке расподеле“ посебне и највероватније од многих.

Штавише, у мојој теорији информације, ентропија није само статистичка мера „нереда“ система честица, него је она исто тако и мера „феминизације“ система физичке информације. Уређујући се унутра систем показује безличност према вани, а тај начин гледања на спонтани раст ентропије је таман толико општији од преласка топлоте са тела више температуре на хладније, да ће он још једно време бити неприметан физици. Корак по корак, када се истраже све (не)могућности савременог гледања на ентропију, верујем, доћи ће на ред и нови аспект. Било како било, не одустајте због ентропије јер она је овде само у наговештају.

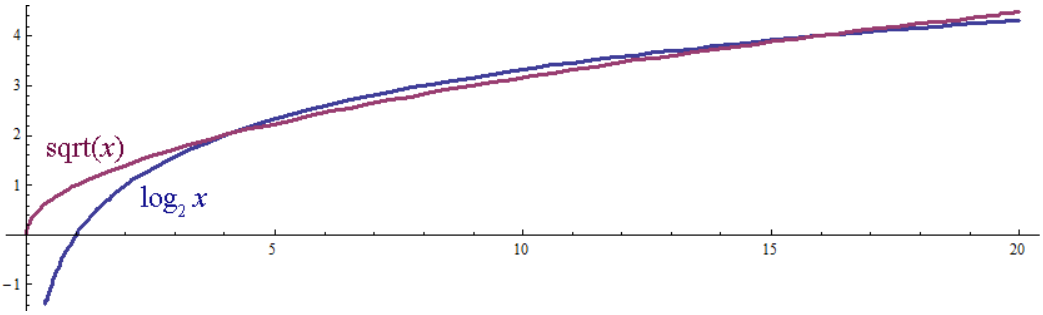
2.1 Хартлијева информација

Када имамо $N = 1, 2, 3, \ldots$ исхода са једнаким шансама, њихова *информација* је

$$H = \log_b N, \tag{2.1}$$

где база логаритма ($b > 0$ и $b \neq 1$) одређује јединицу информације. Када је $b = 2$ информацију меримо у битима, када је $b = 10$ информација је у децитима, а када је $b = e \approx 2,71828$ изражавамо је у натима. Мерење информације једнаковероватних догађаја логаритмом установио је *Хартли* (Ralph Hartley, 1888-1970) 1928. године.

У случају $b = 2$ на интервалу од $N = 4$ до $N = 16$ Хартлијева функција (2.1) приближно је једнака кореној ($H \approx \sqrt{N}$), као што се види на слици 2.1. Плава је логаритамска функција ($y = \log_2 x$), црвена је корена ($y = \sqrt{x}$). То је *информација* представљена логаритмом и површином.



Slika 2.1: Логаритамска и корена функција.

Ова коинциденција, између логаритамске и корене функције, користи нашим чулима да помоћу површина са рецепторима прикупљају *дражи* (стимулансе) које се даље интерпретирају у информације. *Праг дражи* је најмања количина енергије (механичке, светлосне, топлотне, хемијске) коју региструје рецептор и на коју организам реагује. Диференцијални праг дражи је најмања промена дражи коју опажамо[1].

Немачки лекар *Вебер* (Ernst Heinrich Weber, 1795-1878) и његов ученик *Фехнер* (Gustav Fechner, 1801-1887) приметили су да је диференцијални праг дражи сразмеран енергији која је већ дата. Када у руци држимо камен од 50 грама и потребно је додати најмање 1 грам да опазимо разлику у тежини, онда је за камен од 100 грама диференцијални праг 2 грама.

Веберов количник (диференцијални праг подељен енергијом) за дизање терета је 1:50, за притисак (додир на кожи) износи 1:7, за топлоту на кожи 1:30, за вид 1:60, за гласноћу 1:10, за мирис (гуме) 1:4, а за укус (кухињске соли) 1:3. Сабирајући (интегралећи) промене добија се збир свих опажаја које дато чуло може имати у облику Хартлијевог логаритма (2.1).

За разлику од површине за скупљање дражи чија дужина се може употребити за приближну процену информације, логаритам изражава једно дубље својство информације и њену везу са вероватноћом. Важно својство физичке информације је *закон одржања*, да је пластична и да ју је, попут енергије, могуће трансформисати из облика у облик, а да она при томе не мења количину. Ту особину подржава логаритам својом тзв. адитивношћу.

[1] цитати из књиге [3]

Наиме, логаритам производа једнак је збиру логаритама

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N, \tag{2.2}$$

па ако независни догађаји појединачно имају по $M, N = 1, 2, 3, \ldots$ исхода онда ће у пару имати MN исхода. Ако су њихови исходи једнако вероватни, онда овај израз изражава закон одржања информације. На пример, бацање новчића (са два исхода) у пару са бацањем коцке (са шест исхода) имаће $12 = 2 \cdot 6$ исхода, па због

$$\log 12 = \log 2 + \log 6$$

можемо рећи да се информације независних догађаја сабирају.

Следећи пример такође потврђује закон одржања информације али и наглашава да је количина неизвесности (мерена Хартлијевом формулом) врста информације. Нека је дата кутија са $N \in \mathbb{N}$ равноправних куглица. Када их извлачимо једну по једну, вероватноћа извлачења поједине када их је у тренутку извлачења било $n = 1, 2, \ldots, N$ износи $P_n = 1/n$, а количина неизвесности пре извлачења једнака је информацији након и обе износе $H_n = -\log_b P_n$. Укупна извучена информација износи:

$$H = H_N + H_{N-1} + \cdots + H_2 =$$

$$= \log_b N + \log_b(N-1) + \cdots + \log_b 2 + \log_b 1$$

$$= \log_b[N \cdot (N-1) \ldots 2 \cdot 1],$$

а то је заиста тако и према (2.1), јер је $H = \log_b N!$ информација свих могућих извлачења један-по-један датих куглица из кутије.

Следеће важно својство физичке информације је *принцип информације*, који каже да су мање информативни догађаји приоритетнији јер су вероватнији, односно да су вероватнији догађаји чешћи. То својство теже примећујемо иако су његове последице свугде око нас. Информација је ствар истине, а истина се може добити и из лажи (негацијом, импликацијом), па се интернетом неистине шире неколико пута брже од истине. Бајке, уопште *фикција*, али и расправе, интересантније су нам од геометријских теорема, јер чак и *дедукција* може бити тачна када полази од нетачне претпоставке и доводи до нетачне последице. Кодирање је лакше од декодирања.

Физичка информација је и ствар *дејства*, а физичким светом влада тзв. „принцип најмањег дејства“. Због еквиваленције та два, овај познати принцип теоријске физике сада постаје „принцип најмање информације“. Представљен у том облику такође се са физике може поопштити на *биологију* и *социологију*.

У *техници* имамо нешто слично још од 1948. године када је *Шенон* (Claude Shannon, 1916-2001) проценио максималну количину *информације* која може проћи каналом без грешке (в. [13]), формулом

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right). \tag{2.3}$$

Ту је C (енг. channel capacity) *капацитет канала* у битима по секунди, теоријска горња граница тачног преноса. B (bandwidth) је ширина фреквентног опсега у херцима. S (signal) је просечна примљена снага сигнала кроз дату ширину, мерена у ватима (W), тј. у џулима у секунди, односно волт амперима. N (noise) је просечна снага шума и интерференције на датој ширини опсега, такође у ватима. Количник S/N је однос сигнала и шума датог комуникационог канала.

Да би се удвостручио пренос (C) није довољно удвостручити сигнал (S), потребно је квадрирати израз у загради логаритма. Степеновањем нумеруса расте капацитет али само линеарно, што је такође врста ометања преноса информације.

2.1.1 Примери

Пример 2.1.1 (Погађање броја)**.** *Неко бира цели број x од 1 до N. Можемо му поставити питање: „Да ли је тај број већи од ...?“. Који је најмањи број питања потребан да се идентификује тражени број x?*

Решење. Када је $N = 2$ довољно је само једно питање: „Да ли је x већи од један?“. Ако је одговор „не“ $x = 1$, а ако је одговор „да“ $x = 2$.

Када је $N = 16$ довољна су четири питања. Рецимо да је замишљени број $x = 7$. Прво питање је „Да ли је замишљени број већи од 8?“. Одговор је „не“. Друго питање је: „Да ли је замишљени број већи од 4?“. Одговор је „да“. Треће питање је: „Да ли је замишљени број већи од 6?“. Одговор је „да“. Четврто питање је: „Да ли је замишљени број већи од 7?“. Одговор је „не“. Према томе, замишљени број $x = 7$.

Уопште, најмањи број питања потребан да се овим *бинарним тражењем* открије замишљени број $1 \leq x \leq N$ је $\log_2 N$ бита. То је Хартлијева информација. □

Пример 2.1.2 (Тражење оштећеног)**.** *Међу N једнаких новчића налази се један који је оштећен, тако да је лакши од осталих. Имамо теразије којима можемо упоређивати тежину две групе новчића, тако да сазнамо да ли је прва група лакша, једнака или је тежа од друге групе. Колико најмање вагања је потребно да се пронађе оштећени новчић?*

Решење. Када је $N = 3$ довољно је једно вагање. Први и други новчић ставимо на различите тасове, па ако је први лакши то је тај, ако је други лакши он је тај, а ако су исте тежине трећи је тај.

Када је $N = 81$ довољна су четири вагања. У првом вагању поделимо све новчиће у три групе по 27, па нађемо лакшу групу на претходни начин. У другом вагању ту лакшу групу поделимо у три групе по 9 новчића па на исти начин нађемо лакшу. У трећем вагању нађену групу поделимо у три групе по 3 новчића па истом методом нађемо лакшу. У четвртом вагању ту групу поделимо у три новчића и на описани начин нађемо лакши.

Уопште, најмањи број вагања потребан да се овим *тријадним тражењем* открије оштећени новчић је $\log_3 N$. То је Хартлијева информација у јединицама базе $b = 3$. □

Пример 2.1.3 (Нотација бројева)**.** *Колико позиција цифара је потребно да се напише број N у n-арној нотацији?*

Решење. Када је $n = 2$ пишемо бинарно са основним цифрама 0 и 1. Имамо $2^1 = 2$ могућности за прва два броја, нулу и јединицу. Имамо $2^2 = 4$ двоцифрена броја: 00, 01, 10 и 11, а то су нула, јединица, двојка и тројка. Даље је разумљиво да n бинарних позиција садржи 2^n бројева, па ако је то број N, онда је $n = \log_2 N$.

Када је $n = 3$ пишемо у бази три са основним цифрама 0, 1 и 2. Једноцифрених бројева тада има $3^1 = 3$, двоцифрених $3^2 = 9$, а уопште n-то цифрених $3^n = N$ где су укључени и једноцифрени, двоцифрени итд, јер са леве стране могу бити нуле, па је $n = \log_3 N$.

Када је $n = 10$ пишемо декадно. Има $10^1 = 10$ декадних једноцифрених бројева, а то су познате цифре 0, 1, ..., 9. Има $10^2 = 100$ декадних (до највише) двоцифрених бројева. Уопште, има $10^n = N$ декадних (до највише) n-то цифрених бројева, а отуда $n = \log N$. То је Хартлијева информација N равноправних исхода у децитима.

Аналогно, у бројевној бази n за запис броја N потребно је $\log_n N$ позиција. □

2.2 Шенонова информација

Када је количник $x = S/N$, Шенонове формуле (2.3), сигнала и шума, датог канала (енг. signal-to-noise ratio) мањи од јединице, пренос *информације* сматрамо лошим. Тек тада из *Тејлоровог* (Brook Taylor, 1685-1731) развоја логаритамске функције у ред

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots, \quad -1 < x \leq 1, \tag{2.4}$$

налазимо да се пренос (C) повећава (приближно) линеарно са просечном примљеном снагом сигнала (S). Међутим, то не оспорава поменуту принципијелност природе у шкртарењу са информацијом, коме треба додати и толерисање или неизбежност у неким малим емисијама информације. Ово последње у складу је са законом одржања и претпоставком да постоји каква-таква *објективна случајност*.

Наиме, ако би у сваком реду величина природа закидала на информацији, онда би подела информације у све мање делове могла ићи у *бесконачност*. Тада не би важио закон одржања, јер је бесконачан скуп по дефиницији (у смислу количине) једнак свом правом делу, као на пример скуп природних бројева који је прави подскуп скупа целих бријева ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$). Посебно, ако би се свака информација могла уситњавати до инфинитезимала, онда је претпоставка о егзистенцији неког догађаја који нема узрок тешко одржива.

Са нашег општег становишта, догађај који нема *узрок* и догађај којем никако и никада не можемо наћи узрок, еквивалентни су. Штавише, са становишта индивидуе такав случајан догађај еквивалентан је догађају којем дата индивидуа не може спознати узрок. Другим речима, *неизвесност* је релативна појава. Индивидуе (особе, честице) комуницирају размењујући оно што немају, нарочито, преузимајући оно што у датим условима (на датом месту у датом тренутку, у датом окружењу) не би могли имати без текуће размене. То је смисао *комуникације* који подразумевам не само у горе поменутом „догађају који нема узрок“.

Размотримо на пример случајан догађај који се може реализовати у „повољан“ са вероватноћом $P \in [0,1]$ или у „неповољан“ са вероватноћом $Q = 1 - P$. Он је формално еквивалентан са случајним извлачењем једне од $N \in \mathbb{N}$ равноправних куглица, од којих су $K = 1, 2, \ldots, N$ означене као „повољне“, а преосталих $N - K$ као „неповољне“. Вероватноћа извлачења „повољне“ куглице је $P = K/N$, а „неповољне“ $Q = (N - K)/N$, па је опет $P + Q = 1$. Хартлијева информација првих и других, редом је:

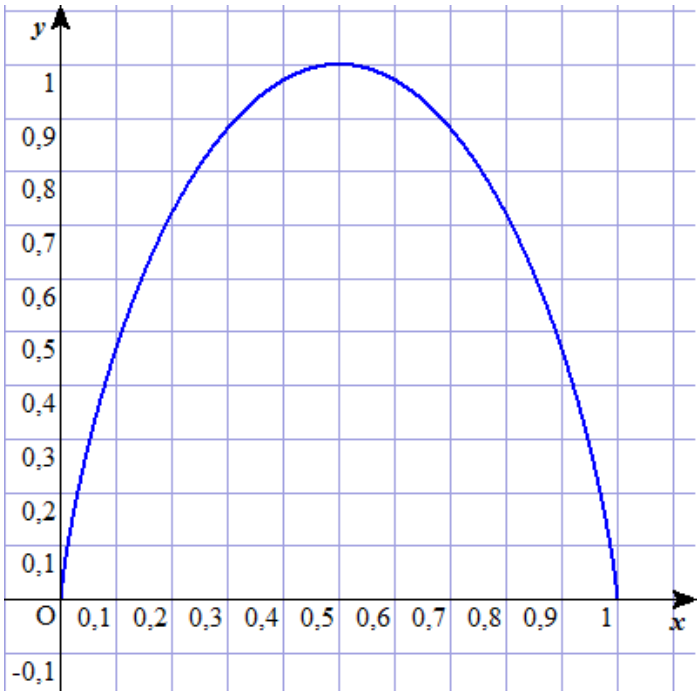
$$H_P = -\log_b P, \quad H_Q = -\log_b Q, \tag{2.5}$$

па је математичко очекивање (енг. mean) информације било којег од њих

$$S = -P \log_b P - Q \log_b Q. \tag{2.6}$$

То је Шенонова *бинарна информација*.

Када ставимо $P = x$, $Q = 1 - x$, $S = y$ и $b = 2$, средња информација датог догађаја је функција $y = y(x)$ изражена у битима чији граф у Декартовом правоуглом систему координата Oxy је представљен на слици 2.2. Види се да је та информација максимална ($y = 1$) када су избори „повољног“ и „неповољног“ догађаја равноправни ($x = 0,5$), а да у крајњим случајевима ишчезава, да $y \to 0$ када $x \to 0$ или $x \to 1$.



Slika 2.2: Шенонова бинарна информација.

У општем случају, произвољне базе логаритма $b > 0$ и $b \neq 1$, за $x \in (0,1)$ одговарајућа Шенонова бинарна функција биће

$$y = -x \log_b x - (1 - x) \log_b (1 - x). \tag{2.7}$$

Да је њен граф такође симетричан на праву $x = 0,5$ види се из инваријантности на смену $x \to 1 - x$. Непрекидност следи из непрекидности логаритамске функције, а помоћу извода може се наћи максимум $y(0,5) = \log_b 2$.

Шенонова информација *дискретног* (највише пребројиво) бесконачног скупа случајних догађаја вероватноћа $p_k \in (0,1)$ за $k = 1, 2, \ldots, n$ износи

$$S = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_b p_k, \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \tag{2.8}$$

при чему може бити $n \to \infty$, ако наведени редови конвергирају. Максимална информација $S = H = \log_b n$ постиже се када су сви исходи једнако вероватни.

Овакве форме информације означавамо и са $S(p_1, \ldots, p_n)$. Узмимо произвољан индекс r, неки цели број од 1 до n, затим поделимо све дате догађаје на два: први вероватноће $q_1 = p_1 + \cdots + p_r$ и други вероватноће $q_2 = p_{r+1} + \cdots + p_n$. Тада је

$$S(p_1, \ldots, p_n) = S(q_1, q_2) + q_1 S(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_r}{q_1}) + q_2 S(\frac{p_{r+1}}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_2}). \tag{2.9}$$

Наиме,

$$S(q_1, q_2) = -q_1 \log_b q_1 - q_2 \log_b q_2,$$

$$q_1 S(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_r}{q_1}) = -p_1 \log_b p_1 - \dots - p_r \log_b p_r + q_1 \log_b q_1,$$

$$q_2 S(\frac{p_{r+1}}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_2}) = -p_{r+1} \log_b p_{r+1} - \dots - p_n \log_b p_n + q_2 \log_b q_2,$$

а збир ове три једначине је наведена (2.9).

Теорема 2.2.1. *Својство (2.9) заједно са својством*

$$S(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) = H(n) = \log_b n, \tag{2.10}$$

дефинише Шенонову информацију (2.8).

Иначе, Хартлијева информација $H(n)$ је максимална вредност Шенонове информације (2.8) када је свака од датих вероватноћа константна, $p_k = \frac{1}{n}$ редом за $k = 1, \dots, n$.

Доказ. Користимо методу *математичке индукције.* За $n = 2$ и $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ из (2.9) следи

$$S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + S(1),$$

одакле $S(1) = 0$, што значи да је тврђење тачно за $n = 1$.

Из (2.9) следи, редом:

$$S(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) = S(q_1, q_2) + q_1 H(nq_1) + q_2 H(nq_2),$$

$$S(q_1, q_2) = S_0(n) - q_1[H(n) + H(q_1)] - q_2[H(n) + H(q_2)],$$

$$S(q_1, q_2) = -q_1 H(q_1) - q_2 H(q_2),$$

где је $H(q) = \log_b q$ према (2.10). Тиме је тврђење теореме доказано за $n = 2$.

Претпоставимо да тврђење теореме вреди за дато $n = 1, 2, \dots$ па докажимо да вреди и за $n + 1$. Ставимо $q_1 = p_1 + \dots + p_n$ и $q_2 = p_{n+1}$. Према (2.9) тада је

$$S(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) = S(q_1, q_2) + q_1 S(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_1}) + q_2 S(1).$$

Доказали смо да је $S(1) = 0$ и $S(q_1, q_2) = -q_1 \log_b q_1 - q_2 \log_b q_2$, а по претпоставци је

$$S(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_1}) = -\frac{p_1}{q_1} \log_b \frac{p_1}{q_1} - \dots - \frac{p_n}{q_1} \log_b \frac{p_n}{q_1}.$$

Узимајући све ово у обзир добијамо да је

$$S(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) = -p_1 \log_b p_1 - \dots - p_n \log_b p_n - p_{n+1} \log_b p_{n+1},$$

што значи да је тврђење теореме тачно за $n + 1$, па према принципу математичке индукције оно важи за сваки природан број n. □

Ово су познате[2] особине Шенонове информације, саме по себи занимљиве, али из којих следи да она не подржава својства физичке информације. Шенонова информација изражава средњу вредност Хартлијевих информација у оквиру неке расподеле и само у том оквиру. Подсећам, ако су $\omega_1, \ldots, \omega_n$ случајни догађаји неке расподеле, редом вероватноћа $p_1, \ldots, p_n$, онда они чине потпун скуп Ω тако да је $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

Према томе, једна (било која) од датих вероватноћа може се изразити помоћу осталих, што само по себи умањује неизвесност догађаја ω_k, па према томе и Шенонову информацију. Израз (2.8) је потцењена вредност физичке информације у случајевима коначног $n > 1$. То ћемо видети у наставку.

Задржаћемо начин израчунавања математичког очекивања дефинишући га такође у односу на неку расподелу, али ћемо Хартлијеве информације њених исхода бирати другачије него што је то урадио Шенон. Посебно ћемо размотрити дискретни случај $n \to \infty$ али и континуум, односно густине вероватноћа, да бисмо поред закона одржања усвојили и принцип информације као део нове формуле.

2.2.1 Ентропија

Као што знамо из статистичке физике, Хартлијева информација (2.1) пропорционална је *Болцмановој* (Ludwig Boltzmann, 1844-1906) *ентропији*, када се узме да је N број *микро-стања* термодинамичког система. Зато се класична информација, а према томе и Шенонова, у литератури често назива ентропијом (в. [8]). Тај ћемо назив задржати и овде када год то не доводи до забуне са истим изразом физике.

Шенон је увео означавање просечне *узајамне информације* између два процеса, случајних променљивих X и Y

$$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y), \tag{2.11}$$

као збир две сопствене ентропије минус ентропија пара. Он је на то указао на основу теореме о кодирању и комуникацији више одвојених случајних процеса кроз канал са шумом и опште теореме кодирања извора. Прва теорема се фокусира на откривање грешака преноса а друга на конверзију аналогно-дигитално и на компресију података. Посебни случајеви оба кодирања су у Шеноновом оригиналном раду [14].

Просечна узајамна информација такође се дефинише и помоћу *условне вероватноће*, онда и помоћу условне ентропије $H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$, одакле

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X). \tag{2.12}$$

У том облику узајамна информација је разлика информација главног процеса и процеса који је у њему садржан, када је овај други познат. Следи да се информација случајне варијабле не мења понављањем, $H(X,X) = H(X)$, а због (2.11) и

$$I(X,X) = H(X), \tag{2.13}$$

због чега се ентропија сматра специјалним случајем просечне узајамне информације.

За класичну теорију наш *принцип информације* је новост, иако је очигледан. Од настанка теорије вероватноће подразумевано је да се вероватнији случајни догађаји чешће реализују, затим је примећено да је већа вест она која је ређа, односно која је мање вероватна, па ипак је истраживачима промакло да примете да се информативнији

[2] в. [11], 3. теорема.

догађаји ређе дешавају. То једноставно запажање, да природа шкртари са емисијом информације, је начело информације. Може ли бити да је оно запостављено због давања већег значаја ентропији у тумачењу информације?

Болцманова ентропија је парадоксална величина. Други закон термодинамике, који каже да топлота спонтано прелази са тела више температуре на тело ниже температуре, а што је еквивалентно спонтаном расту ентропије, која пак расте са логаритмом броја микростања ($\log N$), на први поглед као да говори о повећању ентропије са смањењем вероватноће ($1/N$). Тако брзоплето гледајући занемарује се чињеница да се већи број микростања (N) постиже уједначенијим распоредом (молекула, честица, куглица у кутије) који је заправо више вероватан[3]. То је ствар комбинаторике. Према томе и Болцманова ентропија као и информација теже вероватнијим исходима; оне обе следе принцип информације.

Ово запажање је упозорење да не треба олако придруживати Хартлијеву формулу информације Болцмановој ентропији. Са друге стране њихову повезаност не можемо нити игнорисати. То двоје мири формула (2.13) о повећању ентропије са порастом просечне узајамне информације, условно речено, о *феминизацији* растом ентропије. О порасту унутрашње комуникације на уштрб вањске.

2.2.2 Примери

Пример 2.2.2 (Факсимил)**.** *Колика је информација једне странице факсимила?*

Решење. Страница[4] за пренос састоји се од тачака представљених бинарним цифрама (1 за црну, 0 за белу тачку). Резолуција је 200 тачака по инчу (2,54 cm), односно 4×10^4 тачака по квадратном инчу. Према томе, број бинарних цифара потребних за представљање странице је $8,5 \times 11 \times 4 \times 10^4 = 3,74$ Mbit (мегабита).

Са модемом брзине 14,4 kbps (килобита по секунди) пренос такве странице траје 4 минуте и 20 секунди. Захваљујући техникама кодирања, време трансмисије може се свести на 17 секунди! □

Пример 2.2.3 (Музика)**.** *Колико часова MP3 музике садржи један CD ROM?*

Решење. Један CD ROM, који има капацитет 650 Mbytes (мегабајта) садржи више од 10 часова MP3 стерео музике.

Наиме, музички аналогни сигнал CD квалитета, са левим и десним каналом, парцелисан (sampled) је на по 44,1 Khz (килохерца), а свака парцела има 16 bit (бита). Једна секунда стерео музике генерише $44,1 \times 10^3 \times 16 \times 2 = 1,411$ Mbit. Један бајт је осам бита, минута има 60 секунди, час има 60 минута, па израчунајте. □

Пример 2.2.4 (Карте)**.** *Две играће карте се истовремено извлаче из шпила са 32 карте. Нека је A догађај да је бар једна карта црвена, а B догађај да је једна од њих краљ пик. Колика је узајамна информација $I(A,B)$?*

Решење. Вероватноће догађаја A и вероватноћа A под условом B су:

$$P(A) = \frac{16}{32} \cdot \frac{15}{31} + 2 \cdot \frac{16}{32} \cdot \frac{16}{31} = \frac{47}{62}, \quad P(A|B) = \frac{16}{31},$$

[3] в. [9], слика 3.2 и објашњење.

[4] Више о овоме на сајту `http://www-public.imtbs-tsp.eu/`

па због (2.1) и (2.12) добијамо:

$$I(A,B) = \log_2 \frac{62}{47} - \log_2 \frac{31}{16} = -0,5546 \text{ bit}.$$

Зато што догађај B чини A мање изгледним, узајамна информација је негативна. □

Пример 2.2.5 (Алфабет)**.** *Наћи ентропију H, у битима, текста са словима алфабета вероватноћа $p_1 = \Pr(A) = \frac{1}{4}$, $p_2 = \Pr(B) = \frac{1}{8}$, $p_3 = \Pr(C) = \frac{1}{2}$ и $p_4 = \Pr(D) = \frac{1}{8}$.*

Решење. Користимо Шенонову формулу (2.8), добијамо:

$$H = -\sum_{k=1}^{4} p_k \log_2 p_k = -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} = 1,75 \text{ bit},$$

јер је $\log_2 2^x = x$. □

2.3 Биномна расподела

Бернулијева (Jacob Bernoulli, 1654-1705) или *биномна расподела* просто речено је вероватноћа успеха или неуспеха исхода неког случајног експеримента који се понавља више пута. То је врста дистрибуције са два могућа исхода, па префикс „би“ значи два или двапут.

Није новост да се свака *поливалентна логика* (тачно, можда, нетачно) може свести на двовалентну (тачно, нетачно) и да се сваки случајан догађај може свести на „повољан“ и „неповољан“ исход. Када посматрамо такав један случај, редом вероватноћа p и q, при чему је $p + q = 1$, онда можемо говорити о простој биномној расподели $\mathcal{B}(1,p)$. Сложену биномну расподелу $\mathcal{B}(n,p)$ добијамо понављајући просту $n = 1,2,3,\ldots$ пута са константном вероватноћом $\Pr(\text{повољан}) = p$ повољног исхода и вероватноћом $q = 1-p$ неповољног. Претпостављамо да су просте у сложеној биномној расподели независни случајни догађаји[5].

У биномној расподели $\mathcal{B}(n,p)$ случајни опит се понавља $n \in \mathbb{N}$ пута независно увек са константном вероватноћом $p \in (0,1)$. Дискретна случајна променљива X представља број успеха, повољних исхода у том низу понављања, појединог вероватноће p. Вероватноћа једног од низова са $k = 0,1,\ldots,n$ успеха у n реализација је

$$p_k = p^k q^{n-k}, \tag{2.14}$$

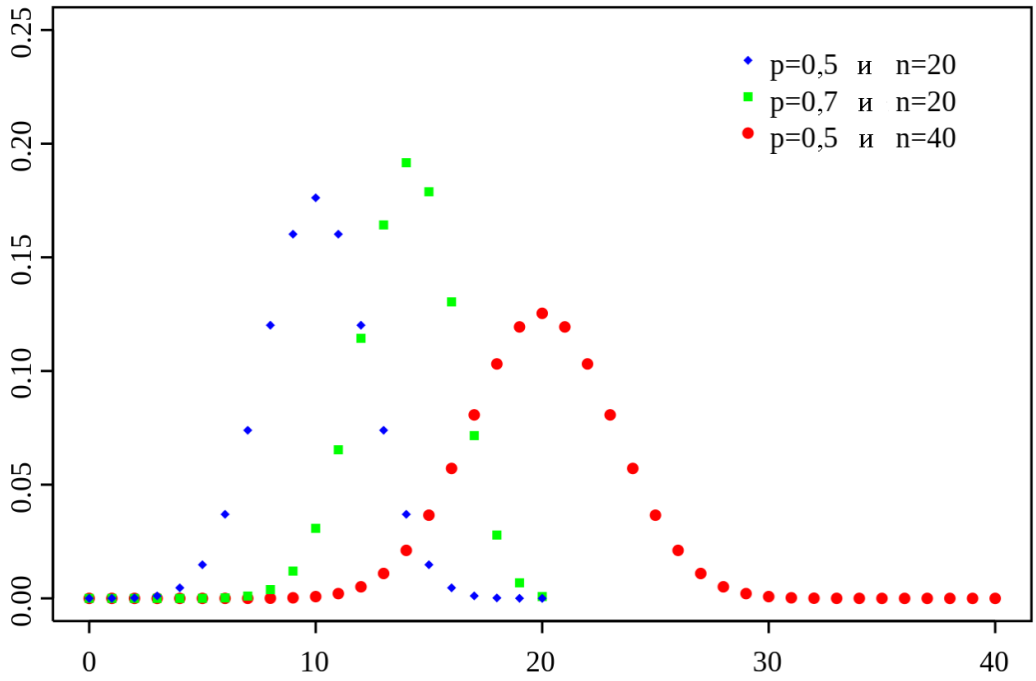
где је $q = 1 - p$ вероватноћа појединог неуспеха. Вероватноћа свих низова са тачно k успеха у n реализација износи

$$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \tag{2.15}$$

где је биномни коефицијент $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$ број подскупова са k елемената узетих из скупа са n елемената. Да бројеви (2.15) чине *расподелу вероватноћа* следи из

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1, \quad P_k \in (0,1). \tag{2.16}$$

[5] Следимо прилог [2].



Slika 2.3: Биномне расподеле $\mathcal{B}(n,p)$.

Вероватноће P_k формирају графове на слици 2.3. Да бројеви (2.14) не чине расподелу следи из:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = q^n + pq^{n-1} + p^2q^{n-2} + \cdots + p^n = \frac{q^n - p^n}{q-p} \neq 1, \tag{2.17}$$

мада они очигледно јесу неке вероватноће.

Средња вредност, или *математичко очекивање* (енг. mean) расподеле варијабле X чија вредност x_k се реализује са вероватноћом p_k, износи

$$\langle X \rangle = \sum_k x_k p_k, \tag{2.18}$$

у Дираковој нотацији, популарној у *квантној механици.* За очекивање биномне расподеле важи следећа теорема.

Теорема 2.3.1. *Математичко очекивање $\mathcal{B}(n,p)$ је*

$$\mu = \langle k \rangle = \sum_{k=0}^{n} kP_k = np,$$

где вероватноћа случајне варијабле k износи $\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$, према (2.15).

Доказ. Израчунавамо редом:

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^kq^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p\frac{\partial}{\partial p}(p^kq^{n-k}) =$$

$$= pq^n\frac{\partial}{\partial p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{p}{q}\right)^k = pq^n\frac{\partial}{\partial p}\left(1+\frac{p}{q}\right)^n = npq^n\left(1+\frac{p}{q}\right)^{n-1}\frac{1}{q}$$

$$= npq^n \frac{(p+q)^{n-1}}{q^{n-1}} \cdot \frac{1}{q} = np(p+q)^{n-1} = np,$$

јер је $p + q = 1$. Тиме је теорема доказана. □

Варијанса $\sigma^2 = \langle (X-\mu)^2 \rangle$ је средње квадратно одступање случајне варијабле X од њене средње вредности μ. У општем случају важи следећа лема (мала теорема).

Лема 2.3.2. *Нека је X дискретна случајна варијабла. Тада је*

$$\sigma^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2,$$

тј. варијанса је и очекивање квадрата X минус квадрат очекивања X.

Доказ. Следи из:

$$\sigma^2 = \sum_x (x-\mu)^2 \Pr(X = x) = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) \Pr(X = x) =$$

$$= \sum_x x^2 \Pr(X = x) - 2\mu \sum_x x \Pr(X = x) + \mu^2 \sum_x \Pr(X = x)$$

$$= \sum_x x^2 \Pr(X = x) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1$$

$$= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2.$$

Тиме је лема доказана. □

У случају биномне расподеле $\mathcal{B}(n,p)$ са случајном варијаблом $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ и природним бројем n опита у којем у сваком повољан исход има константну вероватноћу $p \in (0,1)$ а неповољан вероватноћу $q = 1 - p$, важи следећа теорема.

Теорема 2.3.3. *За $\mathcal{B}(n,p)$ варијанса је $\sigma^2 = npq$.*

Доказ. Прво израчунавамо:

$$\langle X^2 \rangle = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} kn \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}.$$

Стављајући $j = k - 1$ и $m = n - 1$ налазимо даље:

$$\langle X^2 \rangle = np \sum_{j=0}^{m} (j+1) \binom{m}{j} p^j q^{m-j} =$$

$$= np \left[\sum_{j=0}^{m} j \binom{m}{j} p^j q^{m-j} + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j q^{m-j} \right] = np \left[\sum_{j=0}^{m} m \binom{m-1}{j-1} p^j q^{m-j} + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j q^{m-j} \right]$$

$$= np \left[(n-1)p \sum_{j=1}^{m} \binom{m-1}{j-1} p^{j-1} q^{(m-1)-(j-1)} + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j q^{m-j} \right]$$

$$= np[(n-1)p(p+q)^{m-1} + (p+q)^m] = np[(n-1)p + 1] = n^2p^2 + np(1-p).$$

Како је (лема 2.3.2):

$$\sigma^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = np(1-p) + n^2p^2 - (np)^2 = npq,$$

то је теорема доказана. □

Дисперзија (стандардна девијација) биномне расподеле $\mathcal{B}(n,p)$ је

$$\sigma = \sqrt{npq}. \tag{2.19}$$

Дисперзија је назив за корен варијансе (средњег квадратног одступања). У екстремном случају, рецимо $n > 50$, за мало очекивање ($\mu = np < 10$) биномна расподела прелази у Пуасонову, а иначе ($\mu \geq 10$) у нормалну, тзв. Гаусову.

У класичној теорији информације логаритам дисперзије ($S = \ln\sqrt{2\pi e\sigma^2}$) је Шенонова информација нормалне расподеле, што значи да се у граничном случају ова дисперзија понаша као мноштво N у Хартлијевој информацији (2.1). Када се пређе на континуум вероватноћа се израчунава помоћу интеграла густине, а физичка информација губи смисао. Због закона одржања свако својство физичке информације је дискретно.

2.3.1 Апроксимације

Подсетимо се да је Бернулијева (биномна) расподела $\mathcal{B}(n,p)$ дата бројем $n = 1, 2, 3, \ldots$ понављања независних догађаја чији повољан исход има вероватноћу p, а неповољан $q = 1 - p$. Број повољних исхода $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ у датом броју понављања случајног опита има вероватноћу

$$\Pr(B,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \tag{2.20}$$

са средњом вредношћу и варијансом:

$$\mu_B = np, \quad \sigma_B^2 = npq. \tag{2.21}$$

Када је n велико, рецимо $n > 50$ и p мало, тако да је $np < 10$ онда се Бернулијева своди на *Пуасонову расподелу*, иначе она прелази на Гаусову (нормалну) расподелу.

Када је n велико а p тако мало да је $np < 10$, онда имамо:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{2.22}$$

где је $\lambda = np$.

То се доказује са:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k},$$

$$\Pr(B,k) \approx \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n & \text{ако је } k \text{ мало у односу на } n, \\ \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \text{ако је } n \text{ велико.} \end{cases} \tag{2.23}$$

Експоненцијални фактор долази од:

$$\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = n\left(-\frac{\lambda}{n} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{n^2} - \ldots\right) \approx -\lambda,$$

ако $\lambda/n \approx 0$. Тако се Бернулијева расподела своди на Пуасонову, у оба случаја, када је $p \approx 0$, као и када је $p \approx 1$, јер је тада $q \approx 0$.

У општем случају, када $p > 0$ и када $n \to \infty$, тада

$$\Pr(B,k) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp(-\frac{x^2}{2}), \quad x = \frac{j - np}{\sqrt{npq}}, \tag{2.24}$$

униформно по x у сваком коначном интервалу. Ово је Муавр-Лапласова *апроксимација* Бернулијевих вероватноћа (в. [12]).

Наиме, биће $j = np + x\sqrt{npq} \to \infty$ и $k = n - j = nq - x\sqrt{npq} \to \infty$, када $n \to \infty$, јер x остаје у коначном интервалу. Применом *Стирлингове формуле*

$$m! \approx \sqrt{2\pi m} m^m e^{-m}, \tag{2.25}$$

за (2.20) налазимо:

$$\Pr(B,k) \approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi j} j^j e^{-j} \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}} p^j q^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{jk}} \left(\frac{np}{j}\right)^j \left(\frac{nq}{k}\right)^k.$$

Како је

$$\frac{jk}{n} = n\left(n + x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\left(q - x\sqrt{\frac{pg}{n}}\right) \approx npq,$$

то је

$$\Pr(B,k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{np}{j}\right)^j \left(\frac{np}{k}\right)^k.$$

Користећи развој логаритамске функције у ред

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3),$$

имамо:

$$\ln\left(\frac{np}{j}\right)^j \left(\frac{nq}{k}\right)^k = -(np + x\sqrt{npq}) \ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (np - x\sqrt{npq}) \ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

чиме је (2.24) доказано.

Слично се доказује и други део Муавр-Лапласове апроксимације

$$\Pr\{a \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \le b\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad n \to \infty, \tag{2.26}$$

где случајна варијабла X означава број k повољних исхода вероватноће p, па према томе дефинише и број $n - k$ неповољних исхода вероватноће $q = 1 - p$, у броју n поновљених опита Бернулијеве расподеле. Израз десно је познати *Риманов интеграл* којим се дефинише Гаусова расподела.

Такође је познато

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 1, \tag{2.27}$$

што значи да Риманов интеграл добро дефинише *Гаусову расподелу* вероватноћа. Сменом (2.26) густину Гаусове вероватноће пишемо и у облику

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{2.28}$$

где су $\mu = np$ и $\sigma^2 = npq$ редом средња вредност и варијанса Бернулијеве расподеле, па према Муавр-Лапласовој апроксимацији и Гаусове. Наравно да је

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 1. \tag{2.29}$$

Приметимо да за веће дисперзије ($\sigma > 1/\sqrt{2\pi}$) коефицијент густине испред експонента постаје мањи од јединице, што значи да су густине расподеле тада мање и да су мање вероватноће, а да су Хартлијеве информације таквих веће.

Како у складу са (2.13) ентропија расте са просечном узајамном информацијом, то са порастом дисперзије нормалне расподеле расте унутрашња информација. То не само да не мора бити праћено порастом вањске комуникације, него и није. Наиме, спонтаним једноличним, односно аморфним распоређивањем честица смањује се њихова емисија информације ка вани, као да са повећањем сложености информациони системи више одустају од вањског света (феминизирају).

2.3.2 Информација

Хартлијеве информације вероватноћа (2.14) и (2.15) су:

$$h_k = -\log_b p_k, \quad H_k = -\log_b P_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{2.30}$$

где избор базе логаритма ($b > 0$, $b \neq 1$) дефинише јединицу мере информације. Када је $b = 2$ та јединица је *бит*, када је $b = 10$ јединица је *децит*, а када имамо природни логаритам базе ($b = e \approx 2,71828$) јединица информације је *нат*. У сваком случају је:

$$H_k = -\log_b[\binom{n}{k} p_k] = -\log_b \binom{n}{k} - \log_b p_k = -\log_b \binom{n}{k} + h_k, \tag{2.31}$$

па је $H_k \leq h_k$.

Када се дати низ информација h_k јавља са вероватноћама редом P_k, за које знамо да чине биномну расподелу, тада њихову средњу вредност означавамо

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} P_k h_k \tag{2.32}$$

и називамо *физичком информацијом* биномне расподеле $\mathcal{B}(n,p)$. Када се дати низ информација H_k јавља са вероватноћама редом P_k, тада њихову средњу вредност означавамо

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} P_k H_k \tag{2.33}$$

и називамо Шеноновом информацијом биномне расподеле. Због (2.31) је $S_n \leq L_n$, при чему једнакост важи само за $n = 1$, а разлика расте са порастом n.

У случају $n = 1$ обе ове информације су једнаке

$$L_1 = S_1 = -p\log_b p - q\log_b q, \tag{2.34}$$

где је $P_0 = p$ и $P_1 = q = 1 - p$. Приметимо да су ове вероватноће P_0 и P_1 зависне. Уопште, у било којој расподели, због $P_0 + P_1 + \cdots + P_n = 1$ биће P_0 зависно од осталих n вероватноћа. Та зависност смањује информацију коју расподела носи, па је Шенонова информација мања од физичке.

Лема 2.3.4. *За $\mathcal{B}(2,p)$ физичка информација је $L_2 = 2L_1$, где је L_1 физичка информација просте биномне расподеле $\mathcal{B}(1,p)$.*

Доказ. Следи из:

$$L_2 = -p^2 \log_2 p^2 - 2pq \log_2 pq - q^2 \log_2 q^2 =$$
$$= -2p^2 \log_2 p - 2pq \log_2 p - 2pq \log_2 q - 2q^2 \log_2 q$$
$$= -2p(p+q) \log_2 p - 2q(p+q) \log_2 q,$$

а отуда $L_2 = 2L_1$ □

Лема 2.3.5. *За $\mathcal{B}(3,p)$ физичка информација је $L_3 = 3L_1$.*

Доказ. Следи из:

$$L_3 = -p^3 \log_2 p^3 - 3p^2 q \log_2 p^2 q - 3pq^2 \log_2 pq^2 - q^3 \log_2 q^3 =$$
$$= -3p^3 \log_2 p - 3p^2 q \cdot 2 \log_2 p - 3p^2 q \log_2 q - 3pq^2 \log_2 p - 3pq^2 \cdot 2 \log_2 q - 3q^3 \log_2 q$$
$$= -3p^2(p+q) \log_2 p - 3pq(p+q) \log_2 p - 3pq(p+q) \log_2 q - 3q^2(p+q) \log_2 q$$
$$= -3p(p+q)^2 \log_2 p - 3q(p+q)^2 \log_2 q$$
$$= 3(-p \log_2 p - q \log_2 q),$$

па $L_3 = 3L_1$. □

Из ових лема је јасно зашто (2.32) а не (2.33) називамо *физичком информацијом*, јер n понављања независних простих биномних расподела $\mathcal{B}(1,p)$ дефинише сложену $\mathcal{B}(n,p)$, а само (2.33) изражава закон одржања $L_n = nL_1$. Следећа теорема то доказује у општем случају.

Теорема 2.3.6. *Физичка информација $\mathcal{B}(n,p)$ је $L_n = nL_1$, где је L_1 информација просте биномне расподеле $\mathcal{B}(1,p)$.*

Доказ. Користећи (2.32) израчунавамо:

$$L_n = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k \log_2 p^{n-k} q^k =$$
$$= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k) p^{n-k} q^k \log_2 p - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} k q^k \log_2 q$$
$$= -p\Big(\frac{\partial}{\partial p} \sum_{k=0}^{n} p^{n-k} q^k\Big) \log_2 p - q\Big(\frac{\partial}{\partial q} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k\Big) \log_2 q$$
$$= -p\Big[\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^n\Big] \log_2 p - q\Big[\frac{\partial}{\partial q}(p+q)^n\Big] \log_2 q$$
$$= -np(p+q)^{n-1} \log_2 p - nq(p+q)^{n-1} \log_2 q$$
$$= n(-p \log_2 p - q \log_2 q),$$

тј. L_n је n пута већа од L_1, што је и требало доказати. □

Комуницирамо јер немамо све што требамо, а затим и зато што информација не настаје из ничега и не нестаје тек тако, него се може преносити и даље користи. Потврда закона одржања информације долази и из могућности доказа мерењем. Хартлијева дефиниција информације (2.1) у складу је са њеном неуништивости зато што дефинише информацију реализацијом у извесност претходно једнаке количине неизвесности. Она тиме подржава и идеју да је неизвесност врста информације. Логаритам је једина функција $f : N \to \mathbb{R}^+$ са својством $f(xy) = f(x) + f(y)$, па је Хартлијев избор и једини кандидат за одговарајућу физичку информацију (једнаковероватних исхода).

Због закона одржања, сва својства физичке информације морају бити коначна, рекли смо, због дефиниције *бесконачних* скупова[6]. Отуда је свако својство физичке информације коначно дељиво, па има смисла говорити о најмањој информацији, о најмањој интеракцији и о најмањем дејству. Доследно томе, теорема 2.3.6 тврди да сложенији физички системи имају више информације.

2.3.3 Примери

За биномну расподелу важе следећа три *критеријума*:

1. Број понављања опита $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ је фиксиран.
2. Свако понављање $k \leq n$ је независан случајан догађај.
3. Вероватноћа повољног исхода p иста је у сваком понављању.

Пример 2.3.7. *Фер новчић се баца 10 пута. Колика је вероватноћа падања тачно 6 „глава“?*

Решење. Број понављања $n = 10$, број повољних исхода је $k = 6$, вероватноћа повољног исхода је $p = 1/2$ исто као и неповољног $q = 1 - p = 1/2$. Вероватноћа траженог броја исхода, према (2.15), износи:

$$P_6 = \binom{10}{6} p^6 q^{10-6} = \frac{10!}{6! \cdot (10-6)!} \cdot 0,5^{10} = 210 \cdot 0,000976563 = 0,205078$$

приближно на шест децимала. □

Пример 2.3.8. *Око 70% купаца спортских кола су мушкарци. Ако насумице изаберемо 12 власника спортских кола, наћи вероватноћу да су тачно 9 њих мушкарци.*

Решење. Број понављања $n = 12$, број повољних исхода је $k = 9$, вероватноћа повољног исхода је $p = 0,7$ а неповољног $q = 1 - p = 0,3$. Тражена вероватноћа је:

$$P_9 = \binom{12}{9} p^9 q^{12-9} = \frac{12!}{9! \cdot (12-9)!} \cdot 0,7^9 \cdot 0,3^3 = 220 \cdot 0,0403536 \cdot 0.027 = 0,239700$$

приближно на шест децимала. □

Пример 2.3.9. *Вероватноћа да је један производ дефектан је 0,01. Из великог складишта узима се 100 производа. Колика је вероватноћа да међу тих 100 производа:*

I) буде тачно 5 дефектних;

II) број дефектних није већи од 10.

[6] Бесконачни скупови су, што се тиче количине, једнаки свом правом делу.

Решење. Дато је $n = 100$, $p = 0,01$ и $q = 0,99$, па налазимо две вероватноће, редом:

$$P_I = P\{X_{100} = 5\} = \binom{100}{5} \cdot 0,01^5 \cdot 0,99^{95} \approx 0,003$$

$$P_{II} = \sum_{k=0}^{10} P\{X_{100} = k\} = \sum_{k=0}^{10} \binom{100}{k} \cdot 0,01^k \cdot 0,99^{100-k} \approx 1$$

Скоро сигурно је да дефектних нема више од 10. □

Пример 2.3.10. *Код 14400 бацања фер новчића писмо је пало 7428 пута. Дефинисати вероватноћу толиког и већег одступања падања писма од броја* $np = 14400 \cdot 0,5 = 7200$.

Решење. Користимо $\sqrt{npq} = \sqrt{14400 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 60$, па је тражена вероватноћа:

$$P\{7428 - 7200 \le X_{14400} - 7200 \le 1440\} = P\{3,8 \le \frac{X_{14400} - 7200}{60} \le 120\} =$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{3,8}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \Phi(+\infty) - \Phi(3,8) = 1 - 0,99993 = 0,00007.$$

Вредности Лапласове функције $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$ налазе се и у таблицама. □

2.4 Густина расподеле

Нормалну апроксимацију, ознаке $\mathcal{N}(np, npq)$, биномне расподеле $\mathcal{B}(n, p)$ дефинише вероватноћа (енг. probability) облика

$$\Pr\{a \le \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx, \quad \text{када } n \to \infty. \tag{2.35}$$

У примеру 2.3.10 везали смо је за некада често табелирану Лапласову функцију

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \tag{2.36}$$

коју чини површина са лева до апсцисе x испод Гаусове криве на слици 2.4.

Површина испод Гаусове функције густине на слици представља граничне вредности случајних променљивих

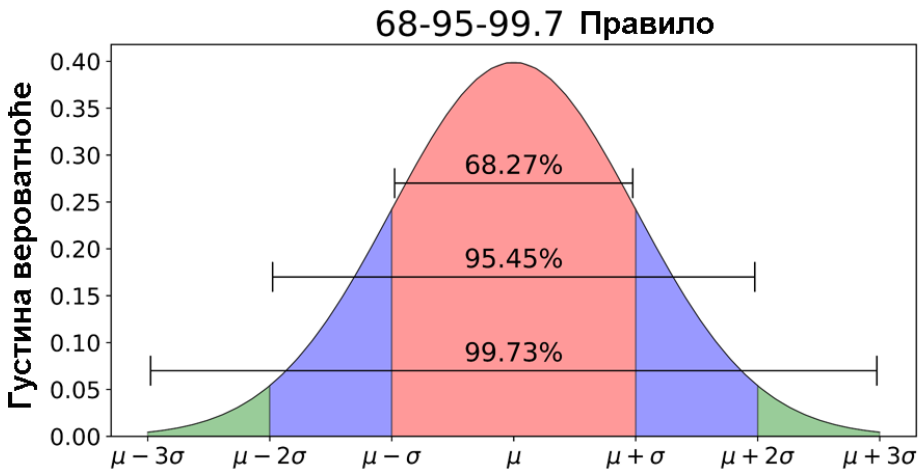
$$X_n^* = \frac{X_n - \mu}{\sigma}, \quad n \to \infty \tag{2.37}$$

биномне расподеле у интервалу $[a, b] \subset \mathbb{R}$, са очекивањем $\mu = np$ и варијансом $\sigma^2 = npq$. То је нормална расподела $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Уведемо ли случајну променљиву X^* са

$$\Pr\{a \le X^* \le b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{2.38}$$

добијамо случајну променљиву *непрекидног* типа, јер за сваки реалан број x_0 је

$$\Pr\{X^* = x_0\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0. \tag{2.39}$$



Slika 2.4: Густина нормалне расподеле $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Иначе, случајна променљива X је непрекидног типа ако постоји функција $\rho(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, таква да је

$$\Pr\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b \rho(x)\, dx. \tag{2.40}$$

Функцију $\rho(x)$ називамо *густином* (расподеле вероватноћа) случајне променљиве X. На слици 2.4 је граф густине *нормалне расподеле*.

Треба приметити да $\rho(x)$ не представља никакву вероватноћу. Назив „густина“ долази отуда што је вероватноћа да X узме вредност у малом интервалу $[x, x + \Delta x]$ сразмерна дужини интервала Δx и вредности $\rho(x)$. Нормална расподела са очекивањем 0 и варијансом 1, коју означавамо $\mathcal{N}(0, 1)$, има густину вероватнће (2.36). Да је то заиста расподела тврди следећа теорема.

Теорема 2.4.1. *Густина нормалне расподеле*

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2.41}$$

представља расподелу вероватноћа.

Доказ. Израчунавамо интеграл дате функције, редом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dy dx}, \quad y = xt,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-\frac{x^2 + x^2 t^2}{2})\, x dt dx}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-\frac{x^2(1+t^2)}{2})\, x dx dt}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^\infty \left[-\frac{1}{1+t^2}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2(1+t^2)\right)\right]_0^\infty dt}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^\infty \left(0+\frac{1}{1+t^2}\right) dt}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{[\mathrm{arctg}(t)]_0^\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\mathrm{arctg}(\infty)-\mathrm{arctg}(0)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}-0} = 1,$$

а то је и требало доказати. □

Сменом $X \to \frac{X-\mu}{\sigma}$ непосредно из ове теореме произилази да је

$$\rho^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.42}$$

такође густина расподеле. Прецизније, сменом интеграла налазимо, редом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\frac{x-\mu}{\sigma})\, d\frac{x-\mu}{\sigma} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]\, d\frac{x-\mu}{\sigma} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]\, dx = 1$$

односно

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1, \tag{2.43}$$

што значи да поред $\rho(x)$ имамо и расподелу (непрекидне) вероватноће густине $\rho^*(x)$. То су редом густине *стандардне и опште* нормалне расподеле. Прва (ρ) се понегде назива и канонска, а друга (овде ρ^*) је подразумевана.

2.4.1 Очекивање и варијанса

Теорема 2.4.2. *Математичко очекивање стандардне густине (2.41) је* $\langle x \rangle = 0$.

Доказ. Следи из:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} x e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-1+0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0+1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,$$

што је и требало доказати. □

Теорема 2.4.3. *Варијанса вероватноће стандардне густине (2.41) је* $\langle x^2 \rangle = 1$.

Доказ. Радимо без леме 2.3.2 и непосредно добијамо:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} x\left(xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right) dx + \int_{0}^{\infty} x\left(xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right) dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(-xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right)_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx + \left(-xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right)_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[(0-0) + (0-0) + \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = 1,$$

а то је требало доказати. □

Сменом којом смо добили густину (2.42) добијамо расподелу (2.43) са очекивањем μ и варијансом σ^2. То је лако проверити. Може и другачије, рецимо из

$$X = \frac{X^* - \mu}{\sigma} \iff X^* = \mu + \sigma X,$$

следи:

$$\langle X^* \rangle = \langle \mu + \sigma \cdot X \rangle = \mu + \sigma \langle X \rangle = \mu + \sigma \cdot 0 = \mu,$$

$$\langle (X^* - \mu)^2 \rangle = \langle [(\mu + \sigma X) - \mu]^2 \rangle = \langle (\sigma X)^2 \rangle = \sigma^2 \langle X^2 \rangle = \sigma^2.$$

Према томе

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu \tag{2.44}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma^2. \tag{2.45}$$

Два интеграла редом дефинишу *очекивање и варијансу* опште нормалне, тзв. Гаусове расподеле. Исте резултате можемо добијати и другачије.

Пример 2.4.4. *Проверити очекивање опште нормалне расподеле (2.44) непосредним интегрирањем.*

Провера. Интегралимо леву страну једнакости (2.44):

$$\langle x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} (x+\mu)\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} \mu\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx$$

$$= I_1 + I_2.$$

Израчунавамо први од ова два интеграла:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{0} x\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{0}^{\infty} x\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{0}^{-\infty} x\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{0}^{\infty} x\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{0}^{\infty} (-x)\exp[-\frac{(-x)^2}{2\sigma^2}]\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{0}^{\infty} x\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{0}^{\infty} x\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{0}^{\infty} x\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx = 0.$$

Према томе, први од горњих интеграла $I_1 = 0$. Израчунавамо други, I_2, користећи теорему 2.4.1. Налазимо:

$$\langle x\rangle = I_1 + I_2 = 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} \mu\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mu\exp[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2]\,d\frac{x}{\sigma} = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{1}{2}x^2]\,dx = \mu.$$

Дакле, $\langle x\rangle = \mu$, а то је требало проверити. □

Пример 2.4.5. *Проверити варијансу опште нормалне расподеле (2.45) непосредним интегрирањем.*

Провера. Интегралимо леву страну (2.45), користећи претходно:

$$\langle (x-\mu)^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]\,dx = \ldots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}]\,dx, \quad x \to \sigma\sqrt{2}x,$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma\sqrt{2}x)^2\exp[-\frac{(\sigma\sqrt{2}x)^2}{2\sigma^2}]\,dx$$

$$= \sigma^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 \exp[-x^2]\, dx.$$

Нека је $t = x^2$, тада $x = \sqrt{t}$ и $dt = 2xdx = 2\sqrt{t}dx$, па је $dx = (2\sqrt{t})^{-1}dt$. Сменом:

$$\langle (x-\mu)^2 \rangle = \sigma^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (\sqrt{t})^2 (2\sqrt{t})^{-1} e^{-t}\, dt = \sigma^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}-1} e^{-t}\, dt =$$

$$= \sigma^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sigma^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2,$$

где је $\Gamma()$ гама функција. Дакле, варијанса нормалне расподеле је заиста σ^2. □

2.4.2 Троугаона расподела

Када разматрамо примере нормалне расподеле $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ као апроксимације биномне $\mathcal{B}(n,p)$, за $n \to \infty$, честа је грешка да се претпостави да је полазна расподела биномна, а да она то заправо није. Такав је пример дискретне *троугаоне расподеле.*

Пример 2.4.6. *Збир два пута случајно бираног броја из скупа* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *не чини биномну расподелу.*

Провера. Случајна варијабла X ове расподеле узима вредности $1+1, 1+2 \ldots, 1+n$, затим $2+1, 2+2, \ldots, 2+n$, па тако редом до $n+1, n+2, \ldots, n+n$. Претпоставља се да је свака од ових $n \times n$ вредности једнако вероватна, односно да свако од поља матрице

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \ldots & n+1 \\ 3 & 4 & \ldots & n+2 \\ \ldots & & & \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

има једнаку вероватноћу. На косим споредним дијагоналама налазе се једнаки бројеви, једна двојка, две тројке и уопште има $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ бројева $x = k+1$, све до броја $x = n+1$ који се понавља n пута. Затим се број $x = n+2$ понавља $n-1$ пут, број $x = n+3$ понавља $n-2$ пута и уопште број $x = n+k$ понавља $n-k+1$ пута.

Расподела вероватноћа (енг. probability) бројева ове матрице је

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \frac{n-|x-(n+1)|}{n^2} & x \in \{2, 3, \ldots, 2n\} \\ 0 & x \notin \{2, 3, \ldots, 2n\} \end{cases} \tag{2.47}$$

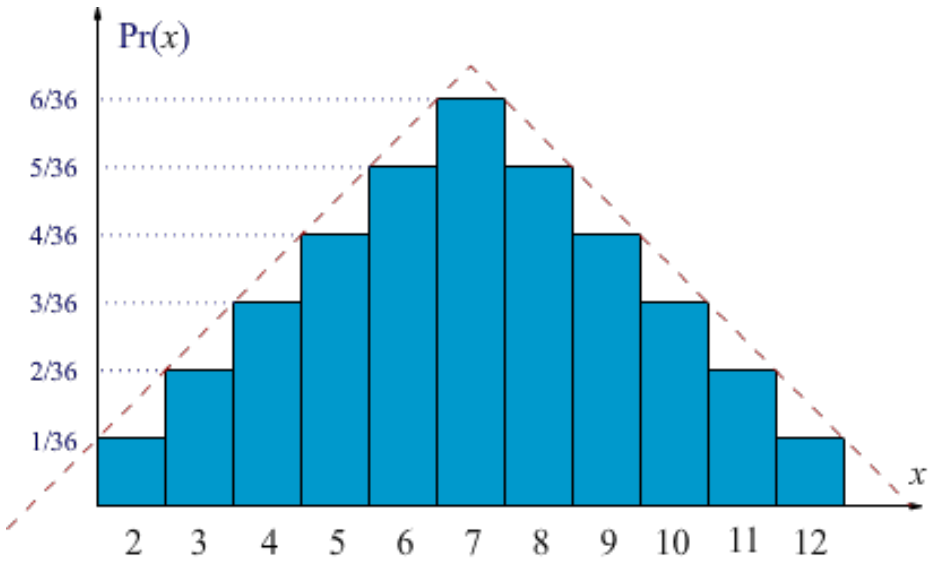
Тако, за шест бројева ($n = 6$) коцке имамо вероватноће $\Pr(2) = \frac{1}{36}$, $\Pr(3) = \frac{2}{36}$, $\Pr(4) = \frac{3}{36}$, $\Pr(5) = \frac{4}{36}$, $\Pr(6) = \frac{5}{36}$, $\Pr(7) = \frac{6}{36}$, $\Pr(8) = \frac{5}{36}$, $\Pr(9) = \frac{4}{36}$, $\Pr(10) = \frac{3}{36}$, $\Pr(11) = \frac{2}{36}$ и $\Pr(12) = \frac{1}{36}$. Збир ових вероватноћа је један, што значи да оне чине расподелу.

На слици 2.5 видимо да вероватноће (2.47) чине неку „троугаону“ расподелу, за разлику од „звонасте“ нормалне која се види на слици 2.4. Она задржава своју троугаону форму и када $n \to \infty$, што значи да се не може апроксимирати нормалном. То је зато што ни сама расподела (2.47) није биномна.

Заиста, општа биномна расподела $\mathcal{B}(n,p)$ има вероватноће

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^x & x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \\ 0 & x \notin \{0, 1, 2, \ldots, n\} \end{cases} \tag{2.48}$$

па за $n = 6$ не постоји такво $p \in (0,1)$ које ће дати (2.47). □



Slika 2.5: Дискретна троугаона расподела вероватноћа.

Код израчунавања дискретних троугаоних расподела дешавају нам се сабирања степена целих бројева, облика

$$F_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.49}$$

које називамо *Фаулхаберовим* (Johann Faulhaber, 1580-1635) збировима. За првих неколико потенција ови збирови се могу добијати и елементарно а, срећом, они су и најчешћи у употреби. Такви су:

$$\begin{aligned}
F_1(n) &= 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}(n^2 + n) = \frac{1}{2}n(n+1) \\
F_2(n) &= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
F_3(n) &= 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\
F_4(n) &= 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)
\end{aligned} \tag{2.50}$$

За веће потенције изрази Фаулхаберових формула постају све компликованији.

Пример 2.4.7. *Показати да су $\mu = n+1$ и $\sigma^2 = (n^2-1)/6$ редом очекивање и варијанса дискретне троугаоне расподеле (2.47).*

Решење. Напишимо вероватноће (2.47) на следећи начин

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \frac{x-1}{n^2} & x \in \{2, 3, \ldots, n\} \\ \frac{2n-x+1}{n^2} & x \in \{n+1, n+2, \ldots, 2n\} \\ 0 & x \notin \{2, 3, \ldots, 2n\} \end{cases} \tag{2.51}$$

Математичко очекивање је:

$$\langle x \rangle = \sum_{x=2}^{2n} x \Pr(x) = \sum_{x=2}^{n} x \Pr(x) + \sum_{x=n+1}^{2n} x \Pr(x) =$$

$$= \sum_{x=2}^{n} x\frac{x-1}{n^2} + \sum_{x=n+1}^{2n} x\frac{2n-x+1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{x=2}^{n} x^2 - \sum_{x=2}^{n} x\right) + \frac{2n+1}{n^2}\sum_{x=n+1}^{2n} x - \frac{1}{n^2}\sum_{x=n+1}^{2n} x^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{x=2}^{n} x^2 - \frac{(n-1)(n+2)}{2}\right) + \frac{2n+1}{n^2}\frac{n(3n+1)}{2} - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{x=2}^{2n} x^2 - \sum_{x=2}^{n} x^2\right)$$

$$= \frac{2}{n^2}\sum_{x=2}^{n} x^2 + \frac{1}{2n^2}[n(2n+1)(3n+1) - (n-1)(n+2)] - \frac{1}{n^2}\sum_{x=2}^{2n} x^2$$

$$= \frac{2}{n^2}\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n - 1\right) + \frac{1}{n^2}[3n^3 + 2n^2 + 1] - \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3}(2n)^3 + \frac{1}{2}(2n)^2 + \frac{1}{6}(2n) - 1\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}(n^3 + n^2) = n + 1.$$

Према томе, математичко очекивање троугаоне расподеле јесте $\mu = n + 1$.

Израчунајмо варијансу помоћу претходног и леме 2.3.2:

$$\langle (x-\mu)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 =$$

$$= \sum_{x=2}^{n} x^2 \Pr(x) + \sum_{x=n+1}^{2n} x^2 \Pr(x) - (n+1)^2$$

$$= \sum_{x=2}^{n} x^2 \frac{x-1}{n^2} + \sum_{x=n+1}^{2n} x^2 \frac{2n-x+1}{n^2} - (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{x=2}^{n} x^3 - \frac{1}{n^2}\sum_{x=2}^{n} x^2 + \frac{2n+1}{n^2}\sum_{x=n+1}^{2n} x^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{x=n+1}^{2n} x^3 - (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(2\sum_{x=2}^{n} x^3 - \sum_{x=2}^{2n} x^3\right) + \frac{1}{n^2}\left[(2n+1)\sum_{x=2}^{2n} x^2 - (2n+2)\sum_{x=2}^{n} x^2\right] - \frac{n^2(n+1)^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[2\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1\right) - \left(\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} - 1\right) - n^2(n+1)^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{n^2}\left[(2n+1)\left(\frac{1}{3}(2n)^3 + \frac{1}{2}(2n)^2 + \frac{1}{6}(2n) - 1\right) - (2n+2)\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n - 1\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{2} + n^2(2n+1)^2 + 1\right] + \frac{1}{n^2}\left(\frac{14n+6}{3}n^3 + \frac{6n+2}{2}n^2 + \frac{2n}{6}n + 1\right)$$

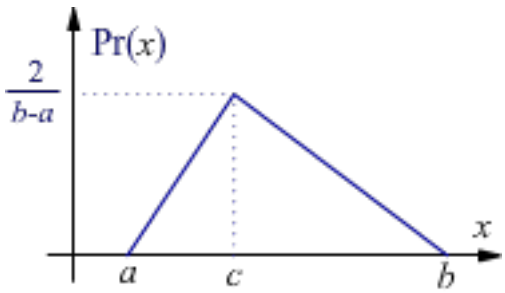
$$= -\frac{1}{n^2}\left(\frac{9}{2}n^4 + 5n^3 + \frac{3}{2}n^2 + 1\right) + \frac{1}{n^2}\left(\frac{14}{3}n^4 + 5n^3 + \frac{4}{3}n^2 + 1\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{6}n^4 - \frac{1}{6}n^2\right) = \frac{1}{6}(n^2 - 1).$$

Дакле, варијанса дате троугаоне расподеле јесте $\sigma^2 = (n^2 - 1)/6$. □

Троугаоне расподеле вероватноћа могу бити и *континуалне*. Тада се за општи случај обично узима доња граница a, горња граница b и мод c, при чему је $a < c < b$ и означавају се са $\mathcal{T}(a,b,c)$. На слици 2.6 видимо један такав троугао површине $\frac{1}{2}(b-a)\frac{2}{b-a} = 1$, добро дефинисане расподеле. Густина вероватноће дата је функцијом

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & x \in [a,c] \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & x \in [c,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases} \tag{2.52}$$



Slika 2.6: Континуална троугаона расподела.

Пример 2.4.8. *Показати да су редом:*

$$\mu = \frac{a+b+c}{3}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca), \tag{2.53}$$

очекивање и варијанса континуалне троугаоне расподеле (2.52).

Доказ. По дефиницији, математичко очекивање је:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,dx = \int_a^c x\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}\,dx + \int_c^b x\frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}\,dx =$$

$$= \left.\frac{\frac{2}{3}x^3 - ax^2}{(b-a)(c-a)}\right|_a^c + \left.\frac{bx^2 - \frac{2}{3}x^3}{(b-a)(b-c)}\right|_c^b$$

$$= \frac{(c-a)(2c+a)}{3(b-a)} + \frac{(b-c)(b+2c)}{3(b-a)}$$

$$= \frac{(b-a)(a+b+c)}{3(b-a)} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Тиме је математичко очекивање, $\mu = \langle x \rangle$, доказано.

Према леми 2.3.2 варијанса је:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,dx\right)^2$$

$$= \int_a^c x^2\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}\,dx + \int_c^b x^2\frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}\,dx - \mu^2$$

$$= \frac{2(\frac{1}{4}x^4 - a\frac{1}{3}x^3)}{(b-a)(c-a)}\bigg|_a^c + \frac{2(b\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4)}{(b-a)(b-c)}\bigg|_c^b - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

$$= \frac{(c-a)(3c^2+2ac+a^2)}{6(b-a)} + \frac{(b-c)(b^2+2bc+3c^2)}{6(b-a)} - \frac{(a+b+c)^2}{9}$$

$$= \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$$

$$= \frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

То је други тражени резултат. □

Континуалне троугаоне вероватноће постају једноставније у случају једнакокраког троугла, када је $a = 0$, $b = 2\alpha$, $c = \alpha$, са висином троугла $1/\alpha$, ознаке $\mathcal{T}(0, 2\alpha, \alpha)$. Опет имамо расподелу (површина троугла је један). Уврштавајући ове податке у (2.53) налазимо очекивање $\mu = \alpha$ и варијансу $\sigma^2 = \mu^2/6$.

Густина (2.52) тада је

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha^2} & x \in [0, \alpha] \\ \frac{2\alpha - x}{\alpha^2} & x \in [\alpha, 2\alpha] \\ 0 & x \notin [0, 2\alpha] \end{cases} \tag{2.54}$$

па се математичко очекивање и варијанса могу израчунати и непосредно као у следећем примеру, аналогно претходном.

Пример 2.4.9. *Показати да су редом:*

$$\mu = \alpha, \quad \sigma^2 = \alpha^2/6, \tag{2.55}$$

очекивање и варијанса континуалне троугаоне расподеле (2.54).

Доказ. По дефиницији, математичко очекивање је:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{x^2}{\alpha^2}\,dx + \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{2\alpha x - x^2}{\alpha^2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3\alpha^2}\bigg|_0^{\alpha} + \frac{\alpha x^2 - \frac{x^3}{3}}{\alpha^2}\bigg|_{\alpha}^{2\alpha}$$

$$= \frac{\alpha}{3} + \frac{2\alpha}{3} = \alpha,$$

па је очекивање $\mu = \langle x \rangle = \alpha$, што је и требало показати.

Према леми 2.3.2 варијанса је:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(x)\,dx - \mu^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\alpha} \frac{x^3}{\alpha^2}\,dx + \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{2\alpha x^2 - x^3}{\alpha^2}\,dx - \alpha^2 \\
&= \left.\frac{\frac{1}{4}x^4}{\alpha^2}\right|_0^{\alpha} + \left.\frac{\frac{2}{3}\alpha x^3 - \frac{1}{4}x^4}{\alpha^2}\right|_{\alpha}^{2\alpha} - \alpha^2 \\
&= \frac{\alpha^2}{4} + \frac{11\alpha^2}{12} - \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{6},
\end{aligned}
$$

а то је варијанса коју смо требали добити. □

Упадљива је сагласност резулата дискретне и континуалне троугаоне расподеле, посебно очекивања и варијансе из примера 2.4.7 и овог последњег 2.4.7. Погледајмо сада неколико њихових примена у трговини.

Пример 2.4.10 (Трговина)**.** *Трговац планира ново продајно место. Како би могао изгледати модел будуће продаје урађен помоћу троугаоне расподеле?*

Решење. Проценимо минималну седмичну продају на око \$1000, максималну на \$6000, а очекивану око \$3000. Тада на апсциси (x-оси) узимамо $a = 1000$, $b = 6000$ и $c = 3000$, а на ординати (y-оси) вредности густина. Граф изгледа као троугао на слици 2.7. Максимум густине је у врху троугла, ордината 0.0004 апсцисе $c = 3000$.

Када трговац жели одредити вероватноћу да ће седмична продаја бити мања од \$2000 он тражи површину троугла од апсцисе 1000 до 2000, што је на пола пута до врха датог троугла, па је онда и половина максималне ординате. Површина, полупроизвод основице и висине, таквог троугла је

$$\Pr(x < 2000) = \frac{1}{2} \times 1000 \times 0.0002 = 0.1$$

представља вероватноћу те мале седмичне продаје. Ако би му седмична продаја била мања од овог износа он би имао слабе изгледе да покрије трошкове, али је вероватноћа да се тако нешто деси веома мала.

Овакве процене за седмичну продају вредности x у интервалу од x_1 до x_2 добијамо и помоћу формуле густине (2.52) израчунавајући интеграл

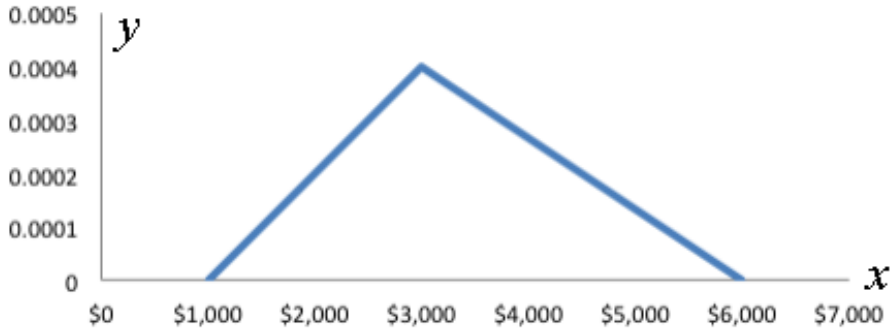
$$\Pr(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\,dx$$

са датим вредностима параметара a, b и c. □

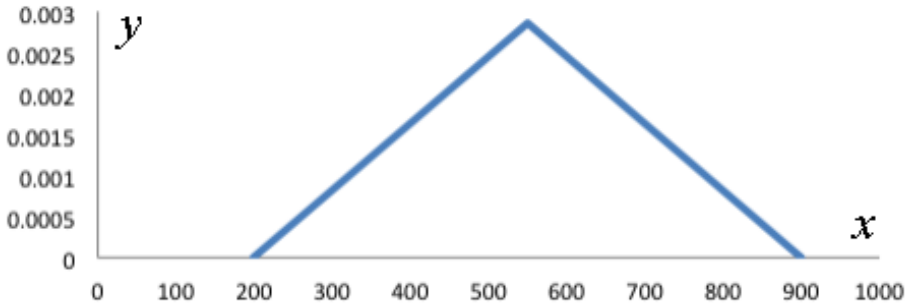
Пример 2.4.11 (Гласање)**.** *Гласање за представника школе је завршено, али гласови још нису бројани. Направити модел троугаоне расподеле очекивања кандидата К.*

Решење. Кандидат К размишља о броју гласова које би могао добити. Он верује да је најизгледнија вредност око 550, али би могао добацити и до 900, или подбацити све до 200. За њега је најједноставнија троугаона расподела са параметрима $a = 200$, $b = 900$ и $c = 550$. Граф густине такве расподеле, на слици 2.8, достиже максимум $y_0 = 0.002857$ са апсцисом $c = 550$.

Ако кандидат жели одредити вероватноћу да ће имати више од 450 гласова, он треба наћи вероватноћу $\Pr(X > 450)$ са датом густином расподеле. Он то може наћи



Slika 2.7: Процена продаје.



Slika 2.8: Процена гласања.

интегралећи одговарајућу функцију (2.52), од 450 до 900, али пошто је расподела троугаона то се може урадити и много лакше. Ево како.

На слици 2.8 главног троугла приметимо троугао од апсцисе 200 до 450, исхода које кандидат не жели. Он је део главног троугла лево од врха, при чему су доње катете у односу $250:350$, па у истом односу $h:y_0$ морају бити и висине. Отуда

$$h = \frac{250 \times y_0}{350} = \frac{250 \times 0.002857}{350} = 0.00204,$$

а површина тог троугла је полупроизвод основице и висине

$$p = \frac{1}{2} \times 250 \times h = 0.25509,$$

а та површина је вероватноћа нежељеног догађаја. Према томе, жељени догађај има вероватноћу $\Pr(X > 450) = 1 - p = 0.74491$. □

2.4.3 Униформна расподела

Униформна расподела (непрекидна униформна, или правоугла) је расподела тако симетричних вероватноћа да су сви интервали исте дужине истих вероватноћа. Густина вероватноће униформне расподеле је

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases} \tag{2.56}$$

где је $a < b$. Униформну расподелу означавамо $\mathcal{U}(a,b)$.

Пример 2.4.12. *Показати да су очекивање и варијанса униформне расподеле:*

$$\mu = \frac{b+a}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Решење. Математичко очекивање је:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2},$$

па је $\mu = \langle x \rangle$.

Варијанса је:

$$\langle (x-\mu)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - \mu^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{x^3}{b-a}\bigg|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12},$$

а то је тражена вредност σ^2. □

Ови резултати су интуитивно разумљиви. Аритметичка средина интервала $[a, b]$ је очекивање μ, а дужина интервала $b - a$ пропорционална је дисперзији $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Иако је релативно једноставна, а можда баш зато, примера униформне расподеле има свукуда. То су серијски бројеви случајно изабране новчанице. Број који падне бацањем фер коцке. Бројеви извучени на лутрији.

Пример 2.4.13 (Квиз)**.** *На квизу је 18 такмичара. Постављено је питање за свих 18, а дозвољено време за одговор је 30 секунди. Колико ће такмичара одговорити у првих 5 секунди?*

Решење. Претпостављамо униформну расподелу одговора. Тада је $a = 0$ и $b = 30$, а интервал траженог исхода од 0 до 5 секунди. Посматрамо правоугаоник густине вероватноће, са основицом 30 и висином $1/30$ тако да је укупна површина један.

Исход који тражимо је његов одсечак са леве стране, основице дужине 5 и исте висине. Површина тог одсечка $5 \times \frac{1}{30} = \frac{1}{6}$ је тражена вероватноћа, а број такмичара $18 \times \frac{1}{6} = 3$. У првих 5 секунди 3 такмичара ће се јавити са одговором. □

Пример 2.4.14 (Аеродром)**.** *Слетање авиона је најављено у интервалу од 30 минута. Колика је вероватноћа доласка авиона између 25 и 30 минута?*

Решење. Претпостављамо униформну расподелу долазака. Параметри су $a = 0$ и $b = 30$, а повољан исход је интервал од 25 до 30 минута. Тражимо вероватноћу $\Pr(25 < X < 30)$ као површину правоугаоника дужине $30-25 = 5$ и висине $1/30$, одсечка од правоугаоника дужине 30 и исте висине. То је шестина; вероватноћа доласка лета између 25 и 30 минута износи $\frac{1}{6} \approx 0,16$. □

2.4.4 Информација густине

За добро дефинисану функцију густине расподеле вероватноће важи да је свугде ненегативна и да је њен интеграл по целом простору вероватноћа

$$\int_\Omega \rho(\omega)\,d\omega = 1. \tag{2.57}$$

То је општа дефиниција, али ми углавном разматрамо једнодимензионални простор Ω а то је једна оса бројева, апсциса односно x-оса, на интервалу од минус до плус бесконачно, па инфинитезималну промену уместо $d\omega$ пишемо dx.

Када је континуална расподела вероватноћа дата својом густином $\rho(x)$, онда се класична *информација* дефинише изразом

$$S = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \log_b \rho(x)\, dx, \tag{2.58}$$

који називамо и Шеноновом информацијом, или *ентропијом*. Јединица информације је одређена базом логаритма ($b > 0$, $b \neq 1$). Са $b = 2$ радимо у битима, са $b = e$ радимо са природним логаритмима у натима.

За униформну расподелу (2.56) класична *информација* густине је

$$S_U = \ln(b - a), \tag{2.59}$$

нат. Наиме:

$$S_U = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a} \ln \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{x}{b-a} \ln(b-a)\Big|_a^b = \ln(b-a).$$

То је Хартлијева информација равномерно вероватних исхода. Као што је раније речено она је физичка информација, јер подржава физички закон одржања информације.

Теорема 2.4.15. *За троугаону расподелу (2.52) класична информација густине је*

$$S_T = \ln \frac{(b-a)\sqrt{e}}{2}, \tag{2.60}$$

у натима.

Доказ. Израчунавамо класичну информацију густине:

$$S_T = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \ln \rho(x)\, dx =$$

$$= -\int_a^c \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} \ln \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}\, dx - \int_c^b \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} \ln \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}\, dx$$
$$= I_1 + I_2.$$

Први од интеграла је:

$$I_1 = -\frac{1}{2}(b-a)(c-a) \int_0^{2/(b-a)} t \ln t\, dt, \quad t = \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)},$$

$$= -\frac{1}{2}(b-a)(c-a) \int_0^{2/(b-a)} \ln t\, d\frac{t^2}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(b-a)(c-a) \left(\frac{t^2}{2} \ln t - \int \frac{t^2}{2}\, d\ln t \right)_0^{2/(b-a)}$$

$$= \frac{c-a}{b-a} \ln \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}(b-a)(c-a) \int_0^{2/(b-a)} \frac{t^2}{2} \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \frac{c-a}{b-a} \ln \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}(b-a)(c-a) \left(\frac{t^2}{4} \right)_0^{2/(b-a)}$$

$$= \frac{c-a}{b-a} \cdot \ln \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{c-a}{b-a}$$

$$= \frac{c-a}{b-a} \ln \frac{(b-a)\sqrt{e}}{2}.$$

Други од интеграла је:

$$I_2 = \frac{1}{2}(b-a)(b-c) \int_{2/(b-a)}^{0} t \ln t \, dt, \quad t = \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)},$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)(b-c) \int_{2/(b-a)}^{0} \ln t \, d\frac{t^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)(b-c) \left(\frac{t^2}{2} \ln t - \int \frac{t^2}{2} \, d \ln t \right)_{2/(b-a)}^{0}$$

$$= -\frac{b-c}{b-a} \ln \frac{2}{b-a} - \frac{1}{2}(b-a)(b-c) \int_{2/(b-a)}^{0} \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} \, dt$$

$$= \frac{b-c}{b-a} \ln \frac{b-a}{2} - \frac{1}{2}(b-a)(b-c) \left. \frac{t^2}{4} \right|_{2/(b-a)}^{0}$$

$$= \frac{b-c}{b-a} \ln \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} \frac{b-c}{b-a}$$

$$= \frac{b-c}{b-a} \ln \frac{(b-a)\sqrt{e}}{2}.$$

Збир ових интеграла је:

$$S = I_1 + I_2 =$$

$$= \frac{c-a}{b-a} \ln \frac{(b-a)\sqrt{e}}{2} + \frac{b-c}{b-a} \ln \frac{(b-a)\sqrt{e}}{2}$$

$$= \ln \frac{(b-a)\sqrt{e}}{2},$$

а то је управо резултат (2.60). □

Упоређивањем троугаоне и униформне информације налазимо

$$S_T < S_U, \tag{2.61}$$

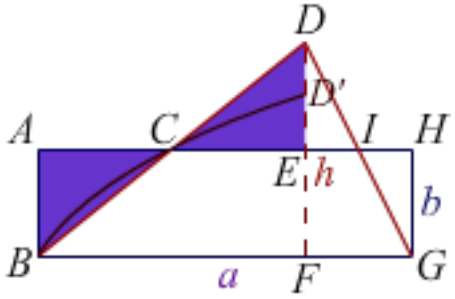
јер је:

$$\ln \frac{(b-a)\sqrt{e}}{2} < \ln(b-a),$$

$$\frac{(b-a)\sqrt{e}}{2} < b-a,$$

$$\sqrt{e} < 2,$$

јер су све ове неједнакости међусобно еквивалентне (једнако тачне), а последња је еквивалентна са $e < 4$, што је тачно јер је $e = 2.71828\ldots$ база природног логаритма.



Slika 2.9: Униформна и троугаона расподела.

То исто се може разумети и помоћу слике 2.9. Четвороугао $ABGH$ има основицу $a = BG$ и такву бочну ивицу $b = GH$ да је његова површина $ab = 1$, јер он представља униформну расподелу. Троугао BGD има исту основицу a али двоструко већу висину $h = FD$ од b, јер је површина троугла $\frac{1}{2}ah = 1$, а он представља троугаону расподелу. Зато су шрафирани троуглови подударни, $\Delta CAB \cong \Delta CED$.

Какве то има везе са неједнакошћу (2.61)? Троугао ΔCAB налази се на мањој висини од троугла ΔCED, има мање ординате, што значи да његове тачке дају мање вероватноће, па према томе веће информације. Зато што доњи троугао лежи у области ниских вероватноћа, он носи више информације на уштрб горњег, иако оба имају исту површину. Отуда, интегралећи, долази неједнакост (2.61).

Настављајући, када би уместо троугаоне расподеле, уместо правом линијом $B-C-D$ ишла крива линија $B - C - D'$, као на слици 2.9, формирајући неку „криволинијску троугаону“ расподелу, пренос тачака из доње области у горњу био би мањи од троугаоне расподеле, тако да би одговарајућа информација имала вредност између троугаоне и униформне. Другачији пример је нормална расподела, која упркос свом „звонастом“ облику што нас подсећа на троугао (слика 2.4) због своје неограничене базе (од $-\infty$ до $+\infty$) и зато велике зоне ниских вероватноћа, што значи високе информације, може имати укупну информацију већу и од униформне расподеле.

Друго је питање треба ли информацију (2.58) сматрати физичком у случају нормалне расподеле, онако како смо то прихватили у случају Хартлијеве дефиниције? Ако информације униформне, па и троугаоне расподеле, још увек можемо сматрати довољно „Хартлијевским“, да би биле физичке, поставља се питање где је граница након које морамо одустати од Шенонове дефиниције (2.58), да бисмо могли рачунати са физичким законом одржања информације? То су можда дилеме због којих у следећој теореми (само у доказу) користим параметар α да бисмо сагледали обе могућности.

Радимо са општом нормалном расподелом (2.43) у налажењу средњих вредности одговарајућих Хартлијевих информација. Међутим, за Хартлијеве информације не узимамо вероватноће саме нормалне расподеле, него поступамо као и у случају физичке информације биномне расподеле L_B, дозвољавајући могућност да коефицијент $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ има неку другу вредност α.

Теорема 2.4.16. *Информација нормалне расподеле је* $S_N = \ln\sqrt{2\pi e\sigma^2}$.

Доказ.

$$I_\alpha = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \ln \rho_\alpha(x)\, dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ln[\alpha e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}]\, dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ln\alpha\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ln e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

$$= -(\ln\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$= -\ln\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[\frac{x-\mu}{2}\, d\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right]$$

$$= -\ln\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{2}\, de^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= -\ln\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[\frac{x-\mu}{2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, d\frac{x-\mu}{2}\right]$$

$$= -\ln\alpha + \frac{1}{2},$$

Према томе

$$I_\alpha = \ln(\alpha^{-1}\sqrt{e}), \tag{2.62}$$

па стављајући $\alpha^{-1} = \sqrt{2\pi\sigma^2}$, добијамо тражено тврђење. □

Схватимо ли дисперзију нормалне расподеле „базом“, слично бази униформне и троугаоне расподеле, онда се у сва три случаја база понаша аналогно броју N једнако вероватних исхода Хартлијеве информације. На тај начин гледајући, већ имамо физичку информацију у самој класичној. Међутим, стварно разматрати физичку информацију континуума противно је природи такве информације.

Бесконачни скупови су они који су (количином) једнаки свом правом делу, а то није могуће ако важи закон одржања. Због закона одржања физичке информације континуална информација не може бити физичка, па према томе континуалне вредности које смо добили крај су овакве приче.

Са друге стране, поставља се питање како је могуће да постоји нека информација иза које не стоји физичка информација? О том питању сам расправљао детаљније у књизи „Многострукости“ [3], а овде ћу пренети само део. Физичко дејство (производ енергије и времена) и физичка информација пропорционалне су величине. Нема дејства без информације и обрнуто. Добро познати „принцип најмањег дејства“ (шкртарење дејством) и нови „принцип информације“ (шкртарење информацијом) сродни су. Оба, физичко дејство и информација, израз су истина. Само нешто што је „тачно“ може стајати иза произвољне физичке појаве, али истина се може добити и из неистина, на пример негацијом или импликацијом.

Новац функционише као фикција, зато што људи верују да за извесну количину новца могу добити одговарајућу против-вредност. Религије или секте ће окупљати своје следбенике и на фиктивној идеји свога веровања. Питагорина теорема помаже у градњи физичких објеката иако она сама није физичка ствар. Фикције које производе дејства у физичкој реалности, па према томе и физичку информацију, назвао сам псеудо-реалним. Оне дају једносмеран ток информације, без могућности обостраног дејства, каква је на пример и прошлост или *паралелна реалност*, поред поменутих.

У тој књизи је представљен математички концепт апстрактне „стварности“, чија је „објективност“ неспорна, просто зато што се закони математике не могу мењати. Они су у том смислу „објективнији од најобјективнијих“. Другачије речено, у бесконачној математичкој ,супстанци“ налази се по свим својим својствима увек коначна физичка супстанца. Та конструкција је слична Платоновом „свету идеја“, осим што сада знамо да не постоји „скуп свих скупова“ (Раселов парадокс скупова), нити „формула свих формула“ (Геделова теорема немогућности), чему управо додајемо и коначност сваке особине физичке супстанце.

Како је уопште могућ континуум? То је такође једно од тешких питања разматрано у књизи [3]. Бесконачан дискретан низ догађаја је потенцијална могућност, фикција, јер ни један његов остварив део није бесконачан. Дозвољавајући објективну случајност, која је принцип поменуте књиге али и смисао квантно-механичке суперпозиције, неки догађаји имају две или више опција реализације. Ако у низу догађаја бесконачно њих има различите могућности реализације, онда је кардинални број, тј. број елемената скупа, тих могућности *континуум* (скуповне ознаке $\mathfrak{c}$), иако је сваки потенцијални низ физичких догађаја највише *пребројиво бесконачан* (ознаке $\aleph_0$). Континуум је паралелних реалности, иако ми комуницирамо само са једним његовим дискретним низом.

Када би наша мисао била једнодимензионална, дискретна, попут низа свих атома нашег тела или низа свих атома видљиве васионе, онда би човека било могуће просто кодирати и добити дупликат. Такав не би могао размишљати о континууму. Међутим, наша мисао је и двосмислена, па ми можемо спознати паралелне реалности, као што можемо откривати теореме, али са њима не можемо физички комуницирати на начин да ми делујемо на њих као што оне могу мењати нас.

2.5 Дискретне вероватноће

Дискретна дистрибуција описује вероватноћу појаве појединих вредности дискретне случајне променљиве. Дискретна случајна променљива има пребројиво вредности, бесконачно као што је скуп природних бројева или коначно.

Скуп вредности вероватноћа (2.51) дискретне троугаоне расподеле је коначан, има их укупно $2n-1$. Можемо их реорганизовати у сабирке збира

$$\frac{n}{n^2} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2} = 1, \tag{2.63}$$

који је лако проверити. Приметите да су ове и раније вероватноће једнаке, али да је случајна варијабла оних у односу на индексе ових вероватноћа већа за један.

Класична *информација* ове, коначне троугаоне, расподеле је

$$\begin{aligned} S_T(n) &= -\frac{n}{n^2}\log_b\frac{n}{n^2} - 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}\log_b\frac{k}{n^2} \qquad (2.64)\\ &= \frac{n}{n^2}\log_b\frac{n}{n^2} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log_b\frac{k}{n^2}\\ &= -\frac{\log_b n}{n} - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\log_b k + \frac{4\log_b n}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k \end{aligned}$$

$$= -\frac{\log_b n}{n} - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\log_b k + \frac{4\log_b n}{n^2}\frac{1}{2}n(n+1),$$

дакле

$$S_T(n) = \frac{2n+1}{n}\log_b n - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\log_b k. \tag{2.65}$$

Апроксимирано:

$$\sum_{k=1}^{n} k\log k \approx \int_1^{n+1} x\log x\,dx = \Theta(n^2\log n), \tag{2.66}$$

па се и горњи ред асимптотски[7] приближава логаритму броја n

$$S_T(n) = \Theta(\log_b n). \tag{2.67}$$

Физичку информацију можемо проценити истим

$$L_T(n) = \Theta(\log_b n). \tag{2.68}$$

Сагласно континуалној, ова расподела има облик Хартлијеве информације.

Дискретних расподела има превише да их све овде обрађујемо. Нећу радити ни њихов попис, него ћу само поменути основну идеју, да за неке дискретне расподеле нема смисла одвајати физичку од класичне информације, а за неке има. Тог смисла једва да има и у (2.67), али постоје и много мутнији случајеви. У наставку обрадићу само неколико добро познатих бесконачних дискретних расподела у којима постоји јасна разлика између две врсте информације. Постоји једноставна формула физичке информације. Они су поред тога довољно поучни, или бар инспиративни, да се на њима вреди задржати. То су пре свега индикатор једног, два или више пута поновљеног датог „повољног“ догађаја у низу истих случајних опита и случајни ход.

2.5.1 Индикатори

Бацамо коцку све док први пут не падне „шест“, или је бацамо до друге „шестице“, или до треће или до n-те. Понављамо случајни опит са константном вероватноћом повољног исхода p и неповољног $q = 1 - p$, све док се повољан исход појави n пута. То је дискретна (пребројиво бесконачна) расподела, допуна биномној. У првим радовима називао сам је *понављање-до-колекције* (енг. draw-to-win), али се ове врсте расподела могу називати и *индикаторима*.

Индикатор једанпут

Разматрамо понављање истог случајног експеримента све до првог појављивања „повољног“ догађаја, рецимо бацање фер коцке до падања прве „шестице“. Вероватноћа падања „шестице“ након бацања коцке је $p = \frac{1}{6}$, за разлику од не-падања „шестице“ вероватноће $q = \frac{5}{6}$. Повољан исход може се десити већ у првом покушају, или у другом, трећем, ..., или k-том, са бесконачним низом вероватноћа

$$p,\ pq,\ pq^2,\ pq^3,\ \ldots,\ pq^{k-1},\ \ldots \tag{2.69}$$

чији је збир један. За $k = 1, 2, 3, \ldots$ то је дистрибуција вероватноћа $p_k = pq^{k-1}$, где можемо додати $p_0 = 0$ ради поједностављења формула.

[7] Нотација „велико тета“.

Лема 2.5.1. *Низ вероватноћа (2.69) је дистрибуција.*

Доказ. Пре свега, за свако $k = 0, 1, 2, \dots$ је $p_k \geq 0$. Затим, израчунавамо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = p + qp + q^2p + q^3p + \cdots = p \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1,$$

јер $1 - q = p$. Према томе, дати низ (2.69) чини дистрибуцију вероватноћа. □

Средња, *очекивана вредност* случајне варијабле X која узима вредности x_i са вероватноћом p_i дате расподеле, је дугорочно просечна, кажемо очекивана, у понављању истог опита. У физици се означава Дираковом нотацијом, са

$$\langle X \rangle = \sum_i p_i x_i, \tag{2.70}$$

У нашем случају, вредност случајне варијабле је редни број покушаја, дакле x-ови, односно k-ови су природни бројеви. За израчунавања која следе корисне су методе и резултати израчунавања следећих познатих бесконачних сума.

Лема 2.5.2. *Када је* $0 < x < 1$ *тада је:*

1. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$;
2. $\sum_{k=0}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$;
3. $\sum_{k=0}^{\infty} k^2q^k = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$;
4. $\sum_{k=0}^{\infty} k^3q^k = \frac{q(1+4q+q^2)}{(1-q)^4}$.

Доказ. 1. *Конвергенција* овог реда следи из почетног услова $|q| < 1$. Означимо ли његов збир са $Z_1 = 1 + q + q^2 + \dots$, тада је $qZ_1 = q + q^2 + q^3 + \dots$, па је $Z_1 - qZ_1 = 1$, а отуда $Z_1 = 1/(1-q)$, што је прво тврђење леме.

2. Конвергенција следи из почетног услова и $kq^k \to 0$ када $k \to \infty$. Затим имамо:

$$Z_2 = \sum_{k=0}^{\infty} kq^k = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)q^{k-1} = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty} kq^k - \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{q}Z_2 - Z_1,$$

а отуда $Z_2 = q/(1-q)^2$, што је друго тврђење леме.

3. Конвергенција следи слично претходном. Затим:

$$Z_3 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2q^k = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 2k + 1)q^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1} - 2\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{q}Z_3 - \frac{2}{q}Z_2 + Z_1,$$

а отуда $Z_3 = q(1+q)/(1-q)^3$, што је треће тврђење леме.

4. Конвергенција следи на претходни начин. Даље имамо:

$$Z_4 = \sum_{k=0}^{\infty} k^3q^k = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^3q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (k^3 - 3k^2 + 3k - 1)q^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^3 q^{k-1} - 3\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} + 3\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$
$$= \frac{1}{q} Z_4 - \frac{3}{q} Z_3 + \frac{3}{q} Z_2 - Z_1,$$

а отуда $Z_4 = q(1+4q+q^2)/(1-q)^4$, а то је четврто тврђење леме. □

Теорема 2.5.3. *Очекивање броја покушаја расподеле (2.69) је* $\mu_1 = \frac{1}{p}$.

Доказ.

$$\mu_1 = \langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{p}{q} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k q^k = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

□

Варијанса σ^2 је очекивана вредност квадрата одступања случајне варијабле X од њене очекиване вредности μ, у односу на дату расподелу. Прецизније

$$\sigma^2 = \langle (X-\mu)^2 \rangle = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i, \tag{2.71}$$

али је за њено израчунавање често кориснији облик о којем говори лема 2.3.2. Као што знамо, корен варијансе, број $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, назива се *дисперзија*.

Теорема 2.5.4. *Варијанса броја покушаја расподеле (2.69) је* $\sigma_1^2 = \frac{q}{p^2}$.

Доказ. Користимо лему 2.3.2, затим лему 2.5.2, добијамо:

$$\sigma_1^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p q^{k-1} - \mu_1^2 =$$

$$= \frac{p}{q} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{p(1+q)}{(1-q)^3} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2},$$

јер је $1 - q = p$. Тиме је теорема доказана. □

У случају бацања *фер новчића* падање „писма“ и „главе“ су једнако вероватни догађаји, $p = q = \frac{1}{2}$, па је очекивање броја бацања до падања „писма“ $\mu_1 = 2$, а дисперзија, очекивано расипање око тог броја $\sigma_1 = \sqrt{2} \approx 1,41$. У случају бацања фер коцке, „шестицу“ очекујемо након $\mu_1 = 6$ бацања са дисперзијом $\sigma_1 = \sqrt{30} \approx 5,48$ бацања.

Хартлијева информација догађаја (2.69) је

$$h_k = -\log_b p_k, \quad p_k \in (0,1]. \tag{2.72}$$

Шенонову (S) и физичку (L) информацију у простој ситуацији једног бацања новчића, коцке или уопште случајног догађаја са повољним исходом $p \in (0,1)$ и неповољним $q = 1 - p$, сматраћемо једнакима:

$$S = L = -p \log_b p - q \log_b q. \tag{2.73}$$

То значи да у даљем тексту све три, h_k, S и L, сматрамо физичким информацијама, полазиштем *закона одржања* о сабирању информација независних догађаја.

Шенонову информацију расподеле (2.69) израчунајмо по дефиницији. Означимо је са S_1, а затим дефинишимо физичку информацију (2.69) са $L_1 = S_1$.

Теорема 2.5.5. *Физичка информација расподеле (2.69) је*

$$L_1 = \frac{1}{p}(-p\log_b p - q\log_b q).$$

Доказ. Користећи (2.72) налазимо:

$$\begin{aligned}
L_1 &= -\sum_{k=0}^{\infty} p_k \log_b p_k = -\sum_{k=0}^{\infty} q^k p \log_b q^k p = \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} q^k p(k\log_b q + \log_b p) \\
&= -p\sum_{k=0}^{\infty}(kq^k \log_b q + q^k \log_b p) = \\
&= -p(\log_b q)\sum_{k=0}^{\infty} kq^k - p(\log_b p)\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \\
&= -p(\log_b q)\cdot\frac{q}{(1-q)^2} - p(\log_b p)\cdot\frac{1}{1-q} \\
&= -\frac{q\log_b q + p\log_b p}{p},
\end{aligned}$$

а то је требало доказати. □

У бази $b = 2$, у случају бацања новчића расподела (2.69) има информацију $L_1 = 2$ бита, а у случају бацања коцке $L_1 \approx 3,90$ бита. Бацање коцке до падања прве „шестице“ је мање предвидљив догађај од бацања новчића до падања првог „писма“, оно има већу дисперзију са завршетком који носи већу информацију. Информација L_1 је већа од L, формуле (2.73), због додатне неизвесности у очекивању повољног исхода.

Поновљена бацања коцке су *независни* случајни догађаји. Свеједно је да ли исту коцку бацамо више пута узастопно, или имамо више коцки које бацамо одједном. Очекивање падања две „шестице“ морају бити иста у таква два случаја, па исте морају бити и одговарајуће информације. То је следећа тема.

Индикатор двапут

Насумице извлачимо[8] један од десет бројева $0, 1, \ldots, 9$, надајући се рецимо броју 3. Понављамо извлачење све док не добијемо два ($n = 2$) жељена исхода. Опет имамо константне вероватноће повољног и неповољног исхода, редом $p = 1/10$ и $q = 1 - p = 9/10$, у сваком од извлачења. Вероватноће коначних добитака су:

$$p^2,\ 2p^2q,\ 3p^2q^2,\ 4p^2q^3,\ \ldots,\ (k-1)p^2q^{k-2},\ \ldots, \tag{2.74}$$

где можемо писати $p_0 = p_1 = 0$ и $p_k = (k-1)p^2q^{k-1}$, редом за $k = 0, 1, 2, \ldots$ извлачења.

Наиме, када се у низу од k извлачења деси други повољан догађај, онда се први повољан могао десити на $k - 1$ начина. Вероватноћа једног таквог је $p_k = p^2q^{k-2}$, а вероватноћа свих $k - 1$ начина је $P_k = (k-1)p_k$. Други део горњег тврђења, да имамо расподелу вероватноћа, садржан је у следећој леми.

[8] RNG: `https://www.mathgoodies.com/calculators/random_no_custom`

Лема 2.5.6. *Збир вероватноћа (2.74) је један.*

Доказ. Из $p_k \geq 0$ и $q^k \to 0$ када $k \to \infty$, затим због:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = p^2 + 2p^2q + 3p^2q^2 + \cdots = \frac{p^2}{q} \cdot (q + 2q^2 + 3q^3 + \dots) = \frac{p^2}{q} \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = 1,$$

следи тврђење леме. □

Сада можемо израчунати очекивани број извлачења двапут индикатора и варијансу те средње вредности на уобичајен начин за расподеле вероватноћа.

Теорема 2.5.7. *Очекивање расподеле индикатора (2.74) је* $\mu_2 = \frac{2}{p}$.

Доказ. У k-том извлачењу, повољан исход има вероватноћу P_k, па је:

$$\mu_2 = \langle k \rangle = \sum_{k=2}^{\infty} kP_k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p^2q^{k-2} =$$

$$= p^2(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2q + 4 \cdot 3q^2 + \dots) = p^2 \frac{d}{dq}(2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots)$$

$$= p^2 \frac{d}{dq}\Big[\frac{d}{dq}(q^2 + q^3 + q^4 + \dots)\Big] = p^2 \frac{d}{dq}\Big(\frac{d}{dq}\frac{q^2}{1-q}\Big)$$

$$= p^2 \frac{d}{dq}\frac{2q - q^2}{(1-q)^2} = \frac{2p^2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p},$$

што је и требало доказати. □

Пример 2.5.8. *Докажимо теорему 2.5.7 елементарно, без извода.*

Доказ.

$$\mu_2 = \langle k \rangle = \sum_{k=2}^{\infty} kP_k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p^2q^{k-2} =$$

$$= \frac{p^2}{q^2}\left[\left(-q + \sum_{k=1}^{\infty} k^2q^k\right) - \left(-q + \sum_{k=1}^{\infty} kq^k\right)\right] = \frac{p^2}{q^2}\left(\sum_{k=1} k^2q^k - \sum_{k=1}^{\infty} kq^k\right)$$

$$= \frac{p^2}{q^2}\left[\frac{q(1+q)}{(1-q)^3} - \frac{q(1-q)}{(1-q)^3}\right] = \frac{p^2}{q^2}\frac{2q^2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}.$$

□

Приметимо да је очекивање ове расподеле двоструко веће од очекивања претходне, $\mu_2 = 2\mu_1$. То је управо оно што очекујемо за физичку информацију, да се ова може разумети као два пута поновљена претходна. Доследно, не изненађује да је варијанса ове расподеле двоструко већа од претходне, а то тврди и следећа теорема.

Теорема 2.5.9. *Варијанса расподеле индикатора (2.74) је* $\sigma_2^2 = \frac{2q}{p^2}$.

Доказ.

$$\sigma_2^2 = \langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k^2 P_k - \left(\sum_{k=2}^{\infty} kP_k\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k^2(k-1)p^2q^{k-2} - \mu^2 = p^2\frac{\partial}{\partial q}\left(\sum_{k=2}^{\infty} k^2q^{k-1}\right) - \mu^2$$

$$= p^2\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\sum_{k=2}^{\infty} kq^k\right)\right] - \mu^2 = p^2\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(-q + \frac{q}{(1-q)^2}\right)\right] - \mu^2$$

$$= p^2\frac{\partial}{\partial q}\left[-1 + \frac{1+q}{(1-q)^3}\right] - \left(\frac{2}{p}\right)^2$$

$$= p^2\frac{4+2q}{(1-q)^4} - \frac{4}{p^2} = \frac{2q}{p^2}.$$

□

У расподели (2.74), вероватноћа p_k једног повољног догађаја мања је од вероватноће P_k свих повољних, истог догађаја оствареног на било који од $k-1$ начина. Зато су Хартлијеве информације првих веће од одговарајућих других:

$$h_k = -\log_b p_k, \quad H_k = -\log_b P_k. \tag{2.75}$$

Међутим, само друге представљају расподелу, па средњу вредност првих у односу на ту расподелу називамо физичком информацијом и означавамо са L_2, за разлику од средње вредности других по истој расподели која је Шенонова информација.

Теорема 2.5.10. *Физичка информација индикатора за (2.74) је*

$$L_2 = \frac{2}{p}(-p\log_b p - q\log_b q).$$

Доказ. Израчунавамо редом:

$$L_2 = \sum_{k=2}^{\infty} P_k h_k =$$

$$= -\sum_{k=2}^{\infty} P_k \log_b p_k$$

$$= -\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)q^{k-2}p^2\log_b q^{k-2}p^2$$

$$= -p^2\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)q^{k-2}(\log_b q^{k-2} + \log_b p^2) =$$

$$= -p^2(\log_b q)\sum_{k=2}^{\infty}(k-2)(k-1)q^{k-2} - p^2(2\log_b p)\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)q^{k-2}$$

$$= -p^2(\log_b q)(1\cdot 2q + 2\cdot 3q^2 + 3\cdot 4q^3 + \dots) - p^2(2\log_b p)(1 + 2q + 3q^2 + \dots)$$

$$= -p^2(\log_b q)\frac{\partial}{\partial q}(q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \dots) - p^2(2\log_b p)\frac{\partial}{\partial q}(q + q^2 + q^3 + \dots)$$

$$= -p^2(\log_b q)\frac{\partial}{\partial q}\Big[q^2\frac{\partial}{\partial q}(q + q^2 + q^3 + \dots)\Big] - p^2(2\log_b p)\frac{\partial}{\partial q}\frac{q}{1-q}$$

$$= -p^2(\log_b q)\frac{\partial}{\partial q}\Big(q^2\frac{\partial}{\partial q}\frac{q}{1-q}\Big) - p^2(2\log_b p)\frac{1}{(1-q)^2}$$

$$= -p^2(\log_b q)\frac{\partial}{\partial q}\frac{q^2}{(1-q)^2} - 2\log_b p$$

$$= -p^2(\log_b q)\frac{2q}{(1-q)^3} - 2\log_b p$$

$$= -\frac{2q}{p}\log_b q - 2\log_b p$$

$$= \frac{2}{p}(-p\log_b p - q\log_b q),$$

а то је требало доказати. □

Зато што је $L_2 = 2L_1$ ову информацију називамо физичком. Шенонова информација ове расподеле била би

$$S_2 = \sum_{k=2}^{\infty} P_k H_k, \tag{2.76}$$

а она је мања од физичке, јер је $H_k < h_k$ за свако $k > 2$. Да не бисмо оспоравали вредност Шенонове информације, вишак L_2 у односу S_2 треба тумачити на неки физикалан начин. Предлажем да то буде у складу са принципом најмање информације.

Управо то шкртарење са емисијом информације (из неизвесности) чини реализације вероватнијих догађаја чешћим. Даље можемо приметити да исти принцип важи и за паковање и скривање информације, на различите начине. Закључана информација у сложеном догађају може се откључати и распаковати, али то кошта.

У поменутом насумичном извлачењу са враћањем, једног по једног од десет бројева из скупа $\{0, 1, \ldots, 9\}$, до другог извлачења броја 3, основне вероватноће су $p = 0,1$ и $q = 0,9$. Вероватноће првих двадесетак добитака (2.74) су у табели 2.1.

k:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P_k:	0,010	0,018	0,024	0,029	0,033	0,035	0,037	0,038	0,039	0,039

k:	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
P_k:	0,038	0,038	0,037	0,036	0,034	0,033	0,031	0,030	0,029	0,027

Tabela 2.1: Расподела вероватноћа

Примећујемо да ове вероватноће прво расту до $k = 10$ а затим опадају. Уопште, функција ове вероватноће $P(k)$, за $k \in \mathbb{R}$, има максимум $P(k_0)$ за $k_0 = 1 - \ln^{-1} q$. Очекивање расподеле (2.74) је $\mu_2 = 20$, са дисперзијом $\sigma_2 \approx 13,416$. Физичка информација у бази e је $L_2 \approx 6,502$ ната, или $L_2 \approx 9.380$ бита у логаритму базе 2.

Индикатор n пута

Посматрајмо сада понављање случајног опита са повољним исходом константне вероватноће $0 < p < 1$ и неповољним вероватноће $q = 1 - p$ све док се повољан исход не деси три ($n = 3$) пута. Ако се та колекција десила у k-том понављању ($k \geq n$), онда се у претходних $k-1$ понављања повољан исход десио два ($n-1 = 2$) пута, што се може остварити на $\binom{k-1}{2}$ равноправних начина.

У сваком појединoм од тих равноправних начина повољан исход десио се три пута, а неповољан $k-3$ пута, јер је било укупно k понављања. Вероватноћа саме те једне колекције „три повољна“ у k понављања опита је $p_k(3) = p^3 q^{k-3}$, а вероватноћа свих равноправних је $P_k(3) = \binom{k-1}{2} \cdot p_k(3)$.

Уопште, вероватноћа само једне колекције од $n = 1, 2, 3, \ldots$ таквих повољних исхода у $k = 0, 1, 2, \ldots$ опита и вероватноћа свих равноправних износе редом:

$$p_k(n) = p^n q^{k-n}, \quad P_k(n) = \binom{k-1}{n-1} p_k, \tag{2.77}$$

где подразумевамо $p_0(n) = \cdots = p_{n-1}(n) = 0$. Такође, $p_k = p_k(n)$ и $P_k = P_k(n)$, осим ако је изричито другачије речено. Јасно је да бесконачан низ P_k чини расподелу вероватноћа, а да пратећи низ вероватноћа p_k не чине расподелу.

Пример 2.5.11. *Доказати да низ $P_k(n)$ за $k = 1, 2, 3, \ldots$ и $n = 3$ чини расподелу.*

Доказ. Следи из:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(3) = p^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)}{2} q^{k-3} = \frac{p^3}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \sum_{k=0}^{\infty} q^k =$$

$$= \frac{p^3}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{1}{1-q} = \frac{p^3}{2} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p^3}{(1-q)^3} = 1,$$

јер је $p + q = 1$. □

Приметимо да се сличан доказ да је P_k расподела важи за произвољно n, при чему за формирање бројника $(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$ узимамо $n-1$ парцијалних извода геометријског реда, које тада кратимо са називником $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)$. То је очигледно, а затим је очигледно да важи и следећа лема.

Лема 2.5.12. *За $n, k \in \mathbb{N}$ и $k \geq n$ је*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^{k-n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} q + \binom{n+1}{n-1} q^2 + \cdots = (1-q)^{-n},$$

где $q \in (0, 1)$.

Израчунавање физичке информације за (2.77) аналогно теореми 2.5.10, уз помоћ претходне леме незнатно је компликованије:

$$L_n = -\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^{k-n} p^n \log_b q^{k-n} p^n =$$

$$= -p^n (\log_b q) \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} (k-n) q^{k-n} - n p^n (\log_b p) \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^{k-n}$$

$$= -p^n(\log_b q)q\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k-1}{n-1}(k-n)q^{k-n-1} - np^n(\log_b p)\cdot p^{-n}$$

$$= -qp^n(\log_b q)\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k-1}{n-1}q^{k-n} - n\log_b p$$

$$= -qp^n(\log_b q)\frac{\partial}{\partial q}(1-q)^{-n} - n\log_b p$$

$$= -qp^n(\log_b q)\cdot n(1-q)^{-n-1} - n\log_b p$$

$$= -n\frac{q}{p}\log_b q - n\log_b p$$

$$= \frac{n}{p}(-p\log_b p - q\log_b q).$$

Тиме смо доказали следећу теорему.

Теорема 2.5.13. *Физичка информација (2.77) је $L_n = nL_1$, где је L_1 случај за $n = 1$.*

Нисам сигуран да ли је расподела (2.77) разматрана у математици, а верујем да је непозната физици, па ћу навести пар њених основних особина. Може се показати њен значај за (моју) теорију информације, посебно за њену везу са физичким дејством, за површину аналогну Другом Кеплеровом закону[9] и информацији, као и за везу дисперзије ове расподеле са ширењем „случајне шетње“, али од свега набројаног у наставку ћу демонстрирати само ово последње.

Теорема 2.5.14. *Очекивање расподеле (2.77) је $\mu_n = \frac{n}{p}$.*

Доказ.

$$\mu_n = \langle k\rangle = \sum_{k=n}^{\infty} kP_k = \sum_{k=n}^{\infty} k\binom{k-1}{n-1}p^n q^{k-n} =$$

$$= p^n\sum_{k=n}^{\infty} k\cdot\frac{(k-1)!}{(n-1)![(k-1)-(n-1)]!}q^{(k-1)-(n-1)}$$

$$= np^n\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{n!(k-n)!}q^{k-n} = np^n\cdot(1-q)^{-(n+1)} = \frac{n}{p}.$$

□

Теорема 2.5.15. *Варијанса расподеле (2.77) је $\sigma_n^2 = \frac{nq}{p^2}$.*

Доказ. Прво израчунавамо:

$$\langle k^2\rangle = \sum_{k=n}^{\infty} k^2P_k = \sum_{k=n}^{\infty} k^2\binom{k-1}{n-1}p^n q^{k-n} = np^n q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty} k\binom{k}{n}q^k =$$

$$= np^n q^{-n+1}\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}q^k = np^n q^{-n+1}\frac{\partial}{\partial q}\left[q^n\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}q^{k-n}\right]$$

$$= np^n q^{-n+1}\frac{\partial}{\partial q}\left[q^n(1-q)^{-(n+1)}\right]$$

[9] в. [3], Гравитација на страни 59.

$$= np^n q^{-n+1}[nq^{n-1}(1-q)^{-n-1} + q^n(-n-1)(1-q)^{-n-2}(-1)]$$
$$= np^n q^{-n+1} q^{n-1}(1-q)^{-n-2}[n(1-q) + q(n+1)]$$
$$= np^{-2}(n - nq + nq + q) = \frac{n^2 + nq}{p^2}.$$

Затим налазимо варијансу:

$$\sigma_n^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \frac{n^2 + nq}{p^2} - \frac{n^2}{p^2} = \frac{nq}{p^2},$$

а то је и требало доказати. □

Основне особине математичког очекивања и варијансе, а понешто и о индикаторима, наћи ћете на другим местима. На пример у занимљивом предавању „Expectation & Variance“ Алберта Мајера (в. [10]), или неком сличном.

2.5.2 Слободни ход тачке

Материјална тачка T креће се по апсциси, x-оси, полазећи из исходишта ($x = 0$). Са положаја x једним кораком она може доћи само у један од два положаја $x \pm 1$, са вероватноћом покрета у десно $p \in (0,1)$ и покрета у лево $q = 1 - p$. Са $P_k(x)$ означавамо вероватноће да се тачка T у k-том кораку ($k = 0, 1, 2, \dots$) нађе на позицији x.

Анализа оваквог дискретног *слободног хода* са константном вероватноћом p, која следи, показаће да је у случају $p = q = \frac{1}{2}$ њена средња вредност исходиште, а у случају $p > q$ да се дата тачка временом премешта у десно. У сваком случају, са вероватноће $P_k(x)$ прелази се на вероватноћу $P_k(-x)$ заменом вредности p и q (табела 2.2).

$P_k(x)$	$x = -4$	$x = -3$	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$k = 0$					1				
$k = 1$				q	0	p			
$k = 2$			q^2	0	$2pq$	0	p^2		
$k = 3$		q^3	0	$3q^2p$	0	$3p^2q$	0	p^3	
$k = 4$	q^4	0	$4q^3p$	0	$6q^2p^2$	0	$4p^3q$	0	p^4

Tabela 2.2: Вероватноћа корака апсцисе.

Када се тачка T налази на парној позицији $x = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ у следећем кораку наћи ће се у непарној $x + 1$ са вероватноћом p, или непарној $x - 1$ са вероватноћом q, али и обратно, након непарне позиције у следећем кораку наћи ће се у парној. Према томе, полазећи од парног броја нула ($x = 0$), након парног броја корака k тачка ће се увек наћи у некој парној позицији x, а након непарног броја корака наћи ће се у непарној.

Из табеле 2.2 се види да је расподела положаја тачке по могућим позицијама апсцисе за дати број корака слична биномној (2.15), а помало и индикаторима (2.77). Да би тачка T полазећи из исходишта стигла у апсцису $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$, након k корака, она мора учинити укупно тачно x корака десно (вероватноће p) и тачно $k - x$ корака лево (вероватноће q), што је један избор вероватноће

$$p_k(x) = \begin{cases} p^x q^{k-x} & k, x \text{ – једнаке парности,} \\ 0 & k, x \text{ – различите парности.} \end{cases} \tag{2.78}$$

Таквих је избора колико и начина бирања x елемената из скупа са k елемената, тј.

$$\binom{k}{x} = \frac{k!}{x!(k-x)!}. \tag{2.79}$$

Према томе, вероватноћа налажења дате тачке на позицији x након k корака је

$$P_k(x) = \begin{cases} \binom{k}{x} p_k(x) & k, x \ = \ \text{парности}, \\ 0 & k, x \ \neq \ \text{парности}. \end{cases} \tag{2.80}$$

Да се не бисмо морали обазирати на ову парност-непарност, приметимо да је

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha \ln \alpha = 0, \tag{2.81}$$

те да у крајњем случају симболично можемо писати $0 \ln 0 = 0$. Овим ће нам формуле постати једноставније.

Информација корака

Из претходног је јасно да важи неједнакост вероватноћа

$$p_k(x) \leq P_k(x), \tag{2.82}$$

те да је само (2.80) расподела. Наиме, за фиксно $k \in \mathbb{N}$ сабирамо по свим целим бројевима x и налазимо:

$$\sum_x P_k(x) = \sum_x \binom{k}{|x|} p_k(x) = (p+q)^k = 1, \tag{2.83}$$

јер је $p + q = 1$. Отуда

$$-\ln p_k(x) \geq -\ln P_k(x). \tag{2.84}$$

Хартлијева информација је мања уколико је вероватноћа већа. Према томе, ако у односу на расподелу (2.80) дефинишемо средње ове информације, имамо две различите вредности:

$$\begin{cases} L_k = -\sum_x P_k(x) \ln p_k(x) & \text{– физичка информација} \\ S_k = -\sum_x P_k(x) \ln P_k(x) & \text{– класична информација} \end{cases} \tag{2.85}$$

и $L_k \geq S_k$. Прва је нова врста информације, а друга је позната Шенонова.

Назив *физичка информација* у складу је са законом одржања

$$L_k = kL_1, \tag{2.86}$$

за који претпостављамо да важи у свету физике. Интуитивно, ако је сваки од корака k једнако случајан, онда је количина неизвесности k корака тачно једнака k пута неизвесност једног корака, па таква мора бити и дефиниција физичке информације. Да је (2.86) заиста тачно доказано је раније (теорема 2.3.6). Међутим, због (2.84), то онда значи да Шенонова информација није „физичка“.

Дубљи смисао неједнакости (2.84) наћи ћемо у *принципу информације*[10], да природа шкртари са емисијом информације. Задржавајући Шенонову дефиницију информације, физичку можемо покушати објаснити физикално, верујем, помоћу тог принципа. У

[10] в. детаљније у књизи Многострукости [3]

све сложенијим физичким системима (овде у већем броју корака) јавља се све већи *вишак информације* који се наводно некако треба или отклонити или закључати. Том нарастајућем вишку у мноштву супротстављен је тај принцип минимализма који тражи редукцију, а овоме је супротстављен закон одржања који каже да се информација може само трансформисати из облика у облик али не може мењати укупну количину.

Зато претпостављам да сама *организација*, посебно гледана, има физички смисао акумулиране информације. Доследно томе, вишак структуре значи вишак информације, а онда и вишак могућности избора, па зато и вишак интеракција. Када за структуре информације важи принцип најмањег дејства физике оне су онда структуре *неживих бића*, а оне друге које имају вишак информације називам *живим бићима*. О томе сам писао у текстовима из библиографије и још некима.

Очекивање корака

Математичко очекивање, односно *средња вредност*, тачке T на апсциси у $k = 0$ корака износи $\mu_0 = 0 \cdot 1 = 0$. То је, наравно, тачно јер тачка се не помера из исходишта. У случају једног корака ($k = 1$) очекивани положај на x-оси је $\mu_1 = -1 \cdot q + 1 \cdot p = p - q$, што је положај мало десно од исходишта, ако је $p > q$. Након два корака ($k = 2$) очекујемо средњу вредност тачке на апсциси:

$$\mu_2 = -2 \cdot q^2 + 0 \cdot 2pq + 2 \cdot p^2 = 2(p^2 - q^2) = 2(p - q)(p + q) = 2(p - q).$$

Након три корака $\mu_3 = -3q^3 - 3q^2p + 3p^2q + 3p^3 = 3(p^3 - q^3) + 3(p^2q - q^2p) =$

$$= 3(p - q)(p^2 + pq + q^2) + 3pq(p - q) = 3(p - q)(p^2 + 2pq + q^2) = 3(p - q)(p + q)^2,$$

дакле $\mu_3 = 3(p - q)$. Уопште, након k корака очекивани положај тачке T дат је у следећој теореми.

Теорема 2.5.16. *Очекивање положаја расподеле (2.80) за дато k је $\mu_k = k(p - q)$.*

Доказ. Полазимо од дефиниције очекивања:

$$\mu_k = \langle x \rangle = \sum_x x P_k(x) = -\sum_{x<0} |x| \binom{k}{|x|} p_k(x) + \sum_{x \geq 0} x \binom{k}{x} p_k(x).$$

Преласком $x \to -x$ у вероватноћи $p_k(x)$ замењују се p и q. Зато је:

$$\mu_k = \sum_{x \geq 0} x \binom{k}{x} (p^x q^{k-x} - q^x p^{k-x}) =$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{x \geq 0} \binom{k}{x} p^x q^{k-x} - q \frac{\partial}{\partial q} \sum_{x \geq 0} \binom{k}{x} q^x p^{k-x}$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} (p + q)^k - q \frac{\partial}{\partial q} (p + q)^k$$

$$= kp(p + q)^{k-1} - kq(q + p)^{k-1},$$

па из $p + q = 1$ следи тражено тврђење. □

Резултат $\mu_k = k\mu_1$ потврђује независност вероватноћа корака, а затим и саму идеју физичке информације (2.86). Са друге стране, са сваким кораком средњи очекивани положај материјалне тачке T помера се у десно за $p - q$. У аналогији са физичким кретањем честице, овде се поставља питање где одлази сувишна информација која тада настаје, ако претпоставимо да се она не нагомилава?

Честица која се креће комуницира са простором, утолико више што је прираштај информације $L_1 = -p\ln p - q\ln q$ већи. Тај прираштај је већи када је разлика вероватноћа p и q мања, односно када је брзина честице мања. Другим речима, релативни посматрач опажа слабију комуникацију бржих честица, што значи да опажа спорији ток времена бржих честица. Ту смо опет код теза (в. [3]) да садашњост настаје комуникацијом и да је опажање вероватноћа у физичком свету релативна ствар.

Варијанса корака

Следећа важна вредност расподеле варијабле је *варијанса* варијабле. Знамо да је то очекивање квадрата разлике варијабле x и њеног очекивања $\mu = \langle x\rangle$, односно да је то разлика очекивања квадрата варијабле и квадрата њеног очекивања (лема 2.3.2).

Примењено на случај $k = 0$, варијанса је $\sigma_0^2 = 0\cdot 1 - \mu_0^2 = 0$, што је и логично јер нема померања. У случају $k = 1$ имамо $\sigma_1^2 = (-1)^2 q + (+1)^2 p - \mu_1^2 = q + p - (p-q)^2 = 4pq$. Када је $k = 2$ варијанса је $\sigma_2^2 = 4q^2 + 4p^2 - 4(p-q)^2 = 8pq$. За $k = 3$ имамо:

$$\begin{aligned}\sigma_3^2 &= 9q^3 + 3q^2p + 3p^2q + 9p^3 - 9(p-q)^2 = \\ &= 9(q^3+p^3) + 3pq(q+p) - 9(p^2 - 2pq + q^2) = \\ &= 9(q^2 - pq + p^2) + 3pq - 9(p^2 - 2pq + q^2) = 12pq.\end{aligned}$$

Следећа теорема потврђује ове посебне случајеве.

Теорема 2.5.17. *Варијанса положаја расподеле (2.80) за дато k је $\sigma_k^2 = 4kpq$.*

Доказ. Користећи претходно израчунавамо:

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle &= \sum_x x^2 P_k(x) = \sum_{x\geq 0} x^2\binom{k}{x}(p^x q^{k-x} + q^x p^{k-x}) = \\ &= p\frac{\partial}{\partial p}\sum_{x\geq 0} x\binom{k}{x}p^x q^{k-x} + q\frac{\partial}{\partial q}\sum_{x\geq 0} x\binom{k}{x}q^x p^{k-x} \\ &= p\frac{\partial}{\partial p}p\frac{\partial}{\partial p}\sum_{x\geq 0}\binom{k}{x}p^x q^{k-x} + q\frac{\partial}{\partial q}q\frac{\partial}{\partial q}\sum_{x\geq 0}\binom{k}{x}q^x p^{k-x} \\ &= p\frac{\partial}{\partial p}p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^k + q\frac{\partial}{\partial q}q\frac{\partial}{\partial q}(q+p)^k \\ &= p\frac{\partial}{\partial p}pk(p+q)^{k-1} + q\frac{\partial}{\partial q}qk(q+p)^{k-1} \\ &= kp[1+(k-1)p] + kq[1+(k-1)q] \\ &= 2kpq + k^2(p^2+q^2).\end{aligned}$$

Затим формирамо варијансу:

$$\sigma_k^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = 4kpq,$$

а то је оно што је требало доказати. □

Аналогија са бинарном расподелом само је делимична, јер тамо је очекивање (np) веће од овога а варијанса (npq) је мања. Различите су и интерпретације. Материјална честица T кретањем без комуникације са околином увећавала би своју информацију, рецимо за информацију о њеној прошлој информацији. Комуникација са вакуумом сопствену информацију одржава истом.

2.5.3 Слободни ход фронта

Посматрамо целобројне позиције апсцисе (x-осе) и материјалну тачку T која је кренула из исходишта ($x = 0$) и направила $k = 0, 1, 2, \ldots$ корака. Сваки корак је исте дужине (± 1) и вероватноћа $p \in (0, 1)$ у десно, односно $q = 1 - p$ у лево. Када је T достигла апсцису $x \in \mathbb{Z}$ њена следећа апсциса је случајан број $x + 1$ вероватноће p, или број $x - 1$ вероватноће q. Претпоставимо да је $p > q$, као у претходном.

Лако је разумети да ће у непарном броју корака $k \in \{1, 3, 5, \ldots\}$ позиција дате тачке бити неки непаран цели број $x \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}$, а у парном $k \in \{0, 2, 4, \ldots\}$ паран број $x \in \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$. До места $x \geq 0$ апсцисе тачка стиже након x корака десно и $k - x$ корака лево ($k \geq x$). То се може постићи на

$$C_x^k = \binom{k}{x} = \frac{k!}{x!(k-x)!} \tag{2.87}$$

начина, сваки вероватноће

$$p_k(x) = p^x q^{k-x}, \tag{2.88}$$

укупне вероватноће

$$P_k(x) = \binom{k}{|x|} p_k(x), \tag{2.89}$$

где је $|x| = x$ за $x \geq 0$ и $|x| = -x$ за $x < 0$. Тако формирамо табелу 2.2, при чему примећујемо да заменом $x \to -x$ у вероватноћама $p_k(x)$ односно $P_k(x)$ треба заменити p са q. Јасно је да је $p_k(x) \leq P_k(x)$ и да $P_k(x)$ чини биномну расподелу.

Након довољно корака, попут таласа који се шири из једног центра дата тачка стиже до сваке унапред дате позиције апсцисе $x \in \mathbb{Z}$. Током ширења, она има све мању и мању вероватноћу појављивања како на фронту таласа тако и у његовој дубини. За разлику од претходног разматрања, о случајним корацима, где је расправљана расподела вероватноћа константног k по свим могућим x, сада посматрамо вероватноће покретне *фазе таласа*, која се удаљава од исходишта кораком k.

Приметићемо да су то такође неке расподеле вероватноћа и да су оне формално једнаке онима из секције о *индикаторима* (понављању-до-колекције). Наиме, бацање коцке све до првог падања „шестице“ еквивалентно је ширењу позиција дате тачке T до првог достизања унапред датог места x. Бацање коцке до другог падања „шестице“ формално је еквивалентно наиласку другог таласа позиција дате тачке. Уопште, када бацамо коцку све док не сакупимо k „шестица“, биће као да сакупљамо k фронтова таласа ширења позиција дате тачке.

Обрадимо то на мало другачији начин да бисмо приметили нове последице, пре свега у теорији физичке информације у помало новом смислу.

Расподела линије фронта

Нулту, или фронталну линију ширења позиција материјална тачка T формира на апсциси $x \geq 0$ када је у свих претходних $k = 0, 1, 2, \ldots$ корака стално ишла у десно, осим

у последњем. То је догађај вероватноће $p^k q$, при чему је $k = x$, који називам *фронтом таласа* кретања дате тачке. Како ови случајни положаји увек имају неку фронталну границу, то вероватноће $qP_k(k)$ чине неку расподелу:

$$q,\ qp,\ qp^2,\ \dots,\ qp^k, \dots \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{2.90}$$

И заиста:

$$\sum_{k=0}^{\infty} qp^k = q + qp + qp^2 + \dots = q(1 + p + p^2 + \dots) = \frac{q}{1-p} = 1, \tag{2.91}$$

јер $p+q = 1$. Ова расподела је слична нама познатој (2.69), расподели индикатора једног појављивања, са очекивањем броја корака $\frac{1}{p}$.

Разликујемо две врсте случајних варијабли, једна је крајњи положај тачке на апсциси (x), а друга је учињени број корака (k). Из доказа следеће теореме биће јасно да су очекивање апсцисе и броја корака, као и варијансе те две варијабле фронталне линије таласа – једнаке, тј. $\mu_0(x) = \mu_0(k)$ и $\sigma_0^2(x) = \sigma_0^2(k)$.

Теорема 2.5.18. *Фронт расподеле (2.90) има очекивање и варијансу:*

$$\mu_0(k) = \frac{p}{q}, \quad \sigma_0^2(k) = \frac{p}{q^2},$$

у односу на положаје апсцисе.

Доказ. Користимо лему 2.5.2. Математичко очекивање корака је:

$$\mu_0(k) = \langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} kqp^k = 0 \cdot q + 1 \cdot qp + 2 \cdot qp^2 + \dots + xqp^x + \dots =$$

$$= q(p + 2p^2 + \dots + kp^k + \dots) = q \sum_{k=0}^{\infty} kp^k = q\frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{q}.$$

Варијанса корака је:

$$\sigma_0^2(k) = \langle (k - \mu_0)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 qp^k - \mu_0^2(k) =$$

$$= q \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p^k - \left(\frac{p}{q}\right)^2 = q\frac{p(1+p)}{(1-p)^3} - \frac{p^2}{q^2} = \frac{p}{q^2}.$$

То двоје је требало доказати. □

Физичка информација L_0 не зависи од ових бројева одвојено, осим од услова $k = x$ и, наравно, од саме расподеле (2.90). Она је једнака Шеноновој S_0.

Теорема 2.5.19. *Физичка информација фронта расподеле (2.90) је*

$$L_0 = -\frac{1}{q}(p \ln p + q \ln q).$$

Доказ.

$$L_0 = -\sum_{k=0}^{\infty} qp^k \ln qp^k = -q \ln q \sum_{k=0}^{\infty} p^k - q \ln p \sum_{k=0}^{\infty} kp^k =$$

$$= -\frac{q \ln q}{1-p} - q(\ln p)\frac{p}{(1-p)^2} = -\frac{q \ln q}{1-p} - \frac{p \ln p}{1-p}$$

$$= \frac{1}{q}(-p \ln p - q \ln q),$$

а то је требало доказати. □

Расподела прве линије иза фронта

У следећој линији таласа ширења дате тачке, првој иза фронталне, број корака k и апсциса x морају имати једнаку парност (оба су парни или су оба непарни бројеви). Зато ово ширење достигнутих позиција тачке порастом броја корака још више подсећа на физичке таласе. Поред тога, до достизања те линије потребно је тачно једно додатно кретање, улево, уз сва кретања удесно са којим се стиже до фронта таласа.

Кретање улево у нашем случају једнаке је вероватноће $q = 1-p$ као одсуство кретања удесно иза фронта, па и вероватноће ове линије таласа чине расподелу:

$$q^2,\ 2q^2p,\ 3q^2p^2,\ \dots,\ kq^2p^{k-1},\ \dots,\quad (k = 1, 2, 3, \dots). \tag{2.92}$$

Да је то заиста расподела вероватноћа следи из $kq^2p^{k-1} \in (0, 1)$ и збира:

$$q^2 + 2q^2p + 3q^2p^2 + \dots + kq^2p^{k-1} + \dots = \frac{q^2}{p}\sum_{k=0}^{\infty} kp^k = \frac{q^2}{p}\frac{p}{(1-p)^2} = 1.$$

Другим речима, зато што ово случајно корачање увек има и ову фазу, позиције иза нулте линије таласа, зато и ове вероватноће чине неку расподелу. Код прве линије иза фронта, за разлику од фронталне, сада вероватноће (2.92), имају различите очекиване вредности апсцисе (x) од очекиваних вредности броја корака (k), тј. $\mu_1(x) \neq \mu_1(k)$, међутим, варијансе ових варијабли су једнаке, $\sigma_1^2(x) = \sigma_1^2(k)$. То је садржај следеће две теореме.

Теорема 2.5.20. *Очекивање апсцисе и њена варијанса фазе, расподеле (2.92) су:*

$$\mu_1(x) = -1 + \frac{2p}{q}, \quad \sigma_1^2(x) = \frac{2p}{q^2}.$$

Доказ. Очекивање израчунавамо (лема 2.5.2) редом:

$$\mu_1(x) = \langle x\rangle = -1\cdot q^2 + 0\cdot 2q^2p + 1\cdot 3q^2p^2 + 2\cdot 4q^2p^3 + \dots + (k-1)(k+1)q^2p^k + \dots =$$

$$= q^2\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(k+1)p^k = q^2\sum_{k=0}^{\infty}(k^2-1)p^k = q^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}k^2p^k - \sum_{k=0}^{\infty}p^k\right)$$

$$= q^2\left[\frac{p(1+p)}{(1-p)^3} - \frac{1}{1-p}\right] = \frac{p(1+p)}{q} - q = -1 + \frac{2p}{q}.$$

Варијанса апсцисе расподеле (2.92) је:

$$\sigma_1^2(x) = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 =$$

$$= q^2\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)^2(k+1)p^k - \mu_2^2(x) = q^2\sum_{k=0}^{\infty}(k^3-k^2-k+1)p^k - \left(-1+\frac{2p}{q}\right)^2 =$$

$$= q^2\left[\frac{p(1+4p+p^2)}{(1-p)^4} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^3} - \frac{p}{(1-p)^2} + \frac{1}{1-p}\right] - \left(\frac{3p-1}{q}\right)^2 = \frac{2p}{q^2}.$$

То двоје је требало доказати. □

Из табеле 2.2 наслућујемо да би очекивања за апсцису и број корака могла бити различита, а то доказује следећа теорема. У тој другој косој линији десно, троугла табеле, прва апсциса је негативна ($x = -1$), али то постаје небитно квадрирањем, па су варијансе апсцисе и броја корака једнаке.

Теорема 2.5.21. *Очекивање броја корака и њихова варијанса расподеле (2.92) су:*

$$\mu_1(k) = 1 + \frac{2p}{q}, \quad \sigma_1^2(k) = \frac{2p}{q^2},$$

где је $q = 1 - p$.

Доказ. Очекивање је сада:

$$\mu_1(k) = \langle k \rangle = 1 \cdot q^2 + 2 \cdot 2q^2 p + 3 \cdot 3q^2 p^2 + 4 \cdot 4q^2 p^3 + \cdots =$$

$$= \frac{q^2}{p} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p^k = \frac{q^2}{p} \frac{p(1+p)}{(1-p)^3} = \frac{1+p}{1-p} = 1 + \frac{2p}{q}.$$

Варијанса корака је:

$$\sigma_1^2(k) = \langle (k-\mu)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 =$$

$$= (1^2 \cdot q^2 + 2^2 \cdot 2q^2 p + 3^2 \cdot 3q^2 p^2 + 4^2 \cdot 4q^2 p^3 + \dots) - \mu_2^2(k)$$

$$= \frac{q^2}{p} \sum_{k=0}^{\infty} k^3 p^k - \left(1 + \frac{2p}{q}\right)^2 = \frac{q^2}{p} \frac{p(1+4p+p^2)}{(1-p)^4} - \left(\frac{1+p}{q}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+4p+p^2}{q^2} - \frac{1+2p+p^2}{q^2} = \frac{2p}{q^2}.$$

То су та два резултата која је требало доказати. □

Пример 2.5.22. *Доказати теорему 2.5.21 помоћу извода.*

Доказ. Очекивање је такође:

$$\mu_1(k) = \langle k \rangle = 1 \cdot q^2 + 2 \cdot 2q^2 p + 3 \cdot 3q^2 p^2 + 4 \cdot 4q^2 p^3 + \cdots =$$

$$= q^2 \frac{\partial}{\partial p} (p + 2p^2 + 3p^3 + 4p^4 + \dots)$$

$$= q^2 \frac{\partial}{\partial p} \left[p \frac{\partial}{\partial p} (p + p^2 + p^3 + p^4 + \dots) \right]$$

$$= q^2 \frac{\partial}{\partial p} \left[p \frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{1-p} \right]$$

$$= q^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{(1-p)^2} = q^2 \frac{1+p}{(1-p)^3}$$

$$= \frac{1+p}{1-p} = 1 + \frac{2p}{q}.$$

За варијансу корака добијамо:

$$\sigma_1^2(k) = \langle (k-\mu)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 =$$

$$= (1^2 \cdot q^2 + 2^2 \cdot 2q^2 p + 3^2 \cdot 3q^2 p^2 + 4^2 \cdot 4q^2 p^3 + \dots) - \mu_1^2(k)$$

$$= q^2 \frac{\partial}{\partial p} \left[p \frac{\partial}{\partial p} \left(p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{k=1}^{\infty} p^k \right) \right] - \mu_1^2(k)$$

$$= q^2 \frac{\partial}{\partial p} \left[p \frac{\partial}{\partial p} \left(p \frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{1-p} \right) \right] - \mu_1^2(k)$$

$$= q^2 \frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial}{\partial p}\frac{p}{(1-p)^2}\right] - \left(\frac{1+p}{1-p}\right)^2$$

$$= q^2 \frac{\partial}{\partial p}\frac{p(1+p)}{(1-p)^3} - \frac{(1+p)^2}{(1-p)^2}$$

$$= \frac{1+4p+p^2}{(1-p)^2} - \frac{1+2p+p^2}{(1-p)^2}$$

$$= \frac{2p}{(1-p)^2} = \frac{2p}{q^2}.$$

То је резултат и теореме. □

Пример 2.5.23. *Доказати очекивање апсцисе $\mu_1(x) = -1+\frac{2p}{q}$, али не на начин теореме 2.5.20, него помоћу извода.*

Доказ. Очекивање израчунавамо редом:

$$\mu_1(x) = \langle x\rangle = -1\cdot q^2 + 0\cdot 2q^2p + 1\cdot 3q^2p^2 + \cdots =$$

$$= q^2\frac{\partial}{\partial p}(-1\cdot p + 0\cdot p^2 + 1\cdot p^3 + 2\cdot p^4 + \dots)$$

$$= q^2\frac{\partial}{\partial p}\left[-p + p^3\left(1 + 2p + \cdots + xp^{x-1} + \dots\right)\right]$$

$$= q^2\frac{\partial}{\partial p}\left[-p + p^3\frac{\partial}{\partial p}(p + p^2 + \cdots + p^x + \dots)\right]$$

$$= q^2\frac{\partial}{\partial p}\left(-p + p^3\frac{\partial}{\partial p}\frac{p}{1-p}\right)$$

$$= q^2\frac{\partial}{\partial p}\left[-p + \frac{p^3}{(1-p)^2}\right] = q^2\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{-p+2p^2}{(1-p)^2}\right]$$

$$= q^2\frac{-1+3p}{(1-p)^3} = \frac{1}{q}[(-1+p)+2p] = -1 + \frac{2p}{q}.$$

То је тражени резултат. □

Као и обично, Шенонова информација S_1 је мања од физичке L_1 и само нам је ова друга интересантна. О њој говори следећа теорема.

Теорема 2.5.24. *Физичка информација расподеле (2.92) је*

$$L_1 = -\frac{2}{q}(p\ln p + q\ln q),$$

где је такође $q = 1-p$.

Доказ.

$$L_1 = -\sum_{k=1}^{\infty} kq^2p^{k-1}\ln q^2p^{k-1} =$$

$$= -2q^2(\ln q)\sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} - q^2(\ln p)\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p^{k-1} =$$

$$
\begin{aligned}
&= -2q^2(\ln q)\frac{\partial}{\partial p}\sum_{k=1}^{\infty} p^k - q^2(\ln p)p\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial}{\partial p}\sum_{k=1}^{\infty} p^k\right)\\
&= -2q^2(\ln q)\frac{\partial}{\partial p}\frac{p}{1-p} - q^2(\ln p)p\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{p}{1-p}\right)\\
&= -2q^2(\ln q)\frac{1}{(1-p)^2} - q^2(\ln p)p\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{(1-p)^2}\\
&= -2\ln q - q^2(\ln p)\frac{2p}{(1-p)^3}\\
&= \frac{2}{q}(-p\ln p - q\ln q),
\end{aligned}
$$

а то је оно што је требало доказати. □

Пример 2.5.25. *Доказати теорему 2.5.24 елементарно, без извода.*

Доказ.

$$
\begin{aligned}
L_1 &= -2q^2(\ln q)\sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} - q^2(\ln p)\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p^{k-1} =\\
&= -\frac{2q^2}{p}(\ln q)\sum_{k=1}^{\infty} kp^k - \frac{q^2}{p}(\ln p)\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2p^k - \sum_{k=1}^{\infty} kp^k\right)\\
&= -\frac{2q^2}{p}(\ln q)\frac{p}{(1-p)^2} - \frac{q^2}{p}(\ln p)\left[\frac{p(1+p)}{(1-p)^3} - \frac{p}{(1-p)^2}\right]\\
&= -2\ln q - (\ln p)\left(\frac{1+p}{1-p} - 1\right)\\
&= -2\ln q - \frac{2p}{q}\ln p\\
&= -2\frac{1}{q}(p\ln p + q\ln q).
\end{aligned}
$$

Дакле $L_1 = 2L_0$, ознаке L_0 из теореме 2.5.19. То је тај резултат из теореме 2.5.24. □

Оваквог доказивања истог на различите начине има много у мојим претходним радовима, а има и много грешака. Тешко је бити сигуран са открићем које немате са чиме упоредити. Накнадно, а то је већ сада када знамо да су та тврђења тачна, друге начине доказа ових истих ставки можете прескочити.

Расподела n-те линије иза фронта

У општем случају, фаза ширења таласа, $n = 0, 1, 2, \ldots$ линија иза фронталне, достиже апсцису x у броју корака k са којим има исту парност. Њене вероватноће $q\binom{k}{n}p^{k-n}q^n$, за $k = n, n+1, n+2, \ldots$, такође чине нама „скоро па“ познату расподелу:

$$
\binom{n}{n}q^{n+1},\ \binom{n+1}{n}pq^{n+1},\ \binom{n+2}{n}p^2q^{n+1},\ \ldots, \tag{2.93}
$$

а да је то заиста расподела вероватноћа можемо разумети на следећи начин.

Када бацамо фер коцку, са вероватноћом $q = \frac{1}{6}$ пашће „шестица“ а са вероватноћом $p = \frac{5}{6}$ неће. Замислимо сада да ту коцку бацимо $k+1$ пута и питамо се колика је

вероватноћа да је пало тачно $n+1$ „шестица“. Пре свега, k и n су цели бројеви и $k \geq n \geq 0$. Друго, у последњем, $k+1$-том бацању, пала је „шестица“, док их је у претходних k бацања пало тачно n. Ове претходне шестице можемо распоредити на $\binom{k}{n}$ начина, сваки са вероватноћом $p^{k-n}q^n$, а овом производу додамо још један фактор, q, за последњу „шестицу“. То су опет вероватноће (2.93), али сада лакше разумемо да оне припадају различитим догађајима од којих се тачно један мора и може реализовати.

Да вероватноће (2.93) представљају расподелу вероватноћа, дакле да је њихов збир један, можемо разумети и непосредно, у овој интерпретацији. Тачка T насумице шета корацима напред-назад по апсциси и пре-или-касније стиже до сваке позиције унутар крајњих, фронталних, које овде називамо нултим линијама. Скуп тих позиција чини n-та линија иза фронта, о којој је овде реч, чија су било која два положаја различити догађаји, који се морају догађати.

Зато што је (2.93) расподела, имамо:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^{k-n} q^{n+1} = 1,$$

а отуда збир

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^{k} = p^n q^{-n-1}, \tag{2.94}$$

где је $q = 1 - p$, а произвољни $p \in (0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$. Овај резултат користимо у следећим доказима.

Теорема 2.5.26. *Очекивање корака k и варијансе за дато n расподеле (2.93) су:*

$$\mu_n = n + (n+1)\frac{p}{q}, \quad \sigma_n^2 = (n+1)\frac{p}{q^2},$$

где је $p + q = 1$.

Доказ. Израчунавамо математичко очекивање корака:

$$\mu_n = \langle k \rangle = \sum_{k=n}^{\infty} k \binom{k}{n} p^{k-n} q^{n+1} =$$

$$= p^{1-n} q^{n+1} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} k p^{k-1} = p^{1-n} q^{n+1} \frac{\partial}{\partial p} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^k$$

$$= p^{1-n} q^{n+1} \frac{\partial}{\partial p} [p^n (1-p)^{-n-1}]$$

$$= p^{1-n} q^{n+1} [n p^{n-1} (1-p)^{-n-1} + p^n (-n-1)(1-p)^{-n-2}(-1)] =$$

$$= n + (n+1)\frac{p}{q}.$$

Варијанса корака је:

$$\sigma_n^2 = \langle (k - \mu_n)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} k^2 \binom{k}{n} p^{k-n} q^{n+1} = p^{-n} q^{n+1} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} k^2 p^k - \mu_n^2$$

$$= p^{1-n} q^{n+1} \frac{\partial}{\partial p} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} k p^k - \mu_n^2$$

$$= p^{1-n}q^{n+1}\frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial}{\partial p}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}p^k\right] - \mu_n^2$$

$$= p^{1-n}q^{n+1}\frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial}{\partial p}(p^n q^{-n-1})\right] - \mu_n^2$$

$$= p^{1-n}q^{n+1}\frac{\partial}{\partial p}[np^n q^{-n-1} + (n+1)p^{n+1}q^{-n-2}] - \mu_n^2, \quad q = 1-p,$$

$$= p^{1-n}q^{n+1}[n^2p^{n-1}q^{-n-1} + n(n+1)p^n q^{-n-2} + (n+1)^2p^n q^{-n-2} + (n+1)(n+2)p^{n+1}q^{-n-3}] - \mu_n^2$$

$$= [n^2 + n(n+1)pq^{-1} + (n+1)^2pq^{-1} + (n+1)(n+2)p^2q^{-2}] - \mu_n^2$$

$$= (n+1)[(n+1)-n]pq^{-1} + (n+1)[(n+2)-(n+1)]p^2q^{-2}$$

$$= (n+1)pq^{-1}(1+pq^{-1})$$

$$= (n+1)\frac{p}{q^2}.$$

То двоје је требало доказати. □

Лако је проверити да су претходна очекивања и варијансе корака посебни случајеви ове теореме, за $n = 0$ и $n = 1$. Поред тога, треба приметити аналогију случајног хода тачке T са ширењем стварних таласа супстанце. Зато што радимо са физичком информацијом, она заслужује посебну пажњу.

Рецимо, физичка информација таласног фронта L_0, вероватноћа (2.90), константна је без обзира на број претходних корака, а онда информација сваке следеће унутрашње линије таласа једнака је тој константи множеном редним, n-тим, бројем линије увећаним за један, $L_n = (n+1)L_0$. Ово последње ћемо доказати у следећој теореми, али пре тога једно можемо коментарисати.

Како је могуће да се повећава број случајних корака а да информација L_n остаје стално иста? Бацање коцке више пута тражи више дејства и развија више неизвесности, оно вишеструко увећава Хартлијеву информацију, па постављено питање није баш тако бесмислено као што на први поглед изгледа. Нарочито сада када радимо са *физичком информацијом* за коју важи закон одржања и коју не можемо тек тако „гурнути под тепих“. Једно решење које сам раније предложио је прилично „очигледно“. Попут честице физике, материјална тачка у случајном кретању „комуницира“ са празним простором. Она враћа у неизвесност информацију, која се из неизвесности поново реализује сваким новим случајним кораком!

Једна од могућности за овакве „комуникације“ са празним простором је комуникација (у физици позната) са *виртуелним честицама* вакуума, а друга је (у физици непозната) комуникација са прошлошћу, о којој сам писао у књизи Квантна механика [5], а овде помињао у секцији „1.11 Јединственост“ поопштавајући *Махов принцип.*

Теорема 2.5.27. *Физичка информација расподеле (2.93) је*

$$L_n = -\frac{n+1}{q}(p\ln p + q\ln q),$$

где је $p + q = 1$.

Доказ. Израчунавамо Хартлијеве информације вероватноћа $p^{k-n}q^{n+1}$, игноришући понављања, а затим налазимо њихову средњу вредност у односу на расподелу (2.93). Добијамо физичку информацију:

$$L_2 = -\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}p^{k-n}q^{n+1}\ln p^{k-n}q^{n+1} =$$

$$= -\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}p^{k-n}q^{n+1}[(k-n)\ln p + (n+1)\ln q] =$$

$$= -q^{n+1}(\ln p)\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}(k-n)p^{k-n} - (n+1)p^{-n}q^{n+1}(\ln q)\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}p^{k}$$

$$= -q^{n+1}(\ln p)p\frac{\partial}{\partial p}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}p^{k-n} - (n+1)p^{-n}q^{n+1}(\ln q)p^{n}q^{-n-1}$$

$$= -pq^{n+1}(\ln p)\frac{\partial}{\partial p}[p^{-n}\cdot p^{n}q^{-n-1}] - (n+1)\ln q$$

$$= -pq^{n+1}(\ln p)[(n+1)q^{-n-2}] - (n+1)\ln q$$

$$= -\frac{n+1}{q}(p\ln p + q\ln q),$$

а то је оно што је требало доказати. □

Са једне стране је очекивано, због закона одржања информације, да информација расте са дубином таласа, али рекосмо са друге то је чудно. Чудно је и зашто је било уопште могуће свести ове формуле на поменути закон одржања, а онда је још интересантнија мало шира слика, да се физичка информација тако гомила када знамо да је она временски ограничена појава. Ове парадоксе могуће је разрешити проширењем Маховог принципа[11] на гомилање информације у прошлост, а затим на утицај псеудореалне прошлости на реалну садашњост, о чему сам и раније писао[12].

Гомилање прошлости

Информација је утолико већа што је мање очекујемо. Са друге стране, информација не може нестати ни у шта нити настати ни из чега, него се може само трансформисати из једног облика (података) у други, увек једнаке укупне количине. То апсурдно нестајање информације након њеног настанка делом је објашњиво комуникацијом супстанце са простором, осциловањем неизвесности-извесности током кретања честице и проглашавањем неизвесности врстом информације.

Али шта ако то није довољно? Шта ако трајањем случајног хода настаје превише информације да би се она тек тако могла потрошити осциловањем? Честица у следећем положају акумулира исту информацију као она из претходног стања, нова троши исту значајну количину неизвесности као стара, али при томе оставља и траг у историји. За разлику од *енергије* где не морамо бринути о „енергији енергије“ из прошлости, сада и „информацију о информацији“ морамо сматрати неком информацијом. Тај вишак, *прошлост*, не можемо игнорисати.

[11] Егзистенција апсолутне ротације долази од ширег присуства материје.
[12] в. [3]

Сталним настајањем садашњости, дакле стварањем простора, времена и материје, огромне количине информације непрестано наилазе из углавном неизвесне будућности и одлазе у углавном псеудо-реалну прошлост. То извлачим из претходних текстова, а чини се да такво гледање на стварност и сада функционише.

При томе подвлачим, информацију је могуће одредити помоћу физичког *дејства* (производа енергије и трајања) и промена које оно производи, затим да постоје и извори сазнања која могу мењати нас, али није могуће обрнуто, да ми мењамо њих. Информација је дејство, интеракција, истина. Слично томе је сазнање, посебна врста информације која долази из псеудо-реалности, каква је на пример Питагорина теорема или догма, па прошлост и *паралелна реалност*, од којих добијамо једносмерне потицаје, за разлику од правих реалности које са нама интерагују.

То су предубеђења у која се можемо дубље упуштати, па можда и дати значаја познатој тези да прошлост делом креира нашу садашњост и будућност. Прошлост је талог *садашњости* и, ако би она могла у потпуности одредити нашу будућност, онда бисмо имали оспоравање претпоставке о неизвесности из које настаје информација. Такође, ако би се из садашње информације могле у потпуности одредити све њене последице, имали бисмо помало другачији несклад сада са претпоставком да се једном генерисана информација даље трансформише из облика у облик не мењајући количину, која би се на крају (дедукција) потрошила.

Отуда закључак да није могуће тачно предвиђати *будућност*, није могуће тачно спознати садашњост, нити је могуће тачно сагледати прошлост, можда чак и до те мере да оне јединствене и не постоје. Све то није новост за физику, па је стога потпора овој теорији. Штавише, није новост нити тврђење да нас одређује оно што смо били. Новост би био, рецимо, *принцип различитости* који бисмо на овоме могли засновати, а који сам такође помињао у књизи „Многострукости“ [3]. То би било начело да у природи материје није стварање дугих правих линија, идентичних објеката, потпуно једнаких судбина. Оно се слаже са тезом да нас прошлост дефинише, а затим и са новом (хипо)тезом да је свака честица васионе јединствена, јер има јединствену прошлост. То можете називати и *принципом јединствености*.

Надам се да није тешко ове елементе мојих претходних разматрања препознати у насумичним корацима материјалне тачке и гомилању насталих случајних кретњи у ширењу њених могућих положаја, а да није тешко ни обрнуто. Идеје које се јављају разматрањем насумичних корака препознајмо у познатом експерименту *двоструки-отвор* квантне механике. У књизи „Квантна механика“ (в. [5], уз слику 1.26) објашњавао сам да сви одговарајући таласи који су икада били на датом месту, од настанка васионе до данас, интерферирају сада.

То да ми од свих тих прошлих догађаја видимо само једну честицу, као талас на површини мора, формално резултира из искључивости зависних догађаја и само таквих (теорема 1.4.47 исте књиге), а онда из независности догађаја који интерферирају. Ово последње значи да је реч „интерференција“ несретно изабрана у физици и да права интеракција не настаје том појавом, него сударањем, одбијањем, скретањем у пољу које код једне честице изазива нека друга. Независне честице се не сударају, не привлаче и не одбијају попут рецимо наелектрисаних, него *интерферирају* попут фотона.

Поговор

И то би било то, за сада. Делови ове књиге углавном се не налазе у мојим претходним књигама, а опет, све као да је било и тамо. Сматрајте их новином и добрим предвиђањем или непотпуношћу оних и сувишности ових, али текстове сам објавио просто зато што се овакви радови пишу у малим тиражима и за ретке читаоце који наилазе.

У наставку, ако приметимо да је информација свугде око нас и схватимо њену теорију, њене законитости и домете, а примене постану део нашег тумачења друштва, верујем, као што су Дарвинова теорија, хемија, па и сама физика нама основе биологије, овој причи ће требати много наставака. Ако се наша врста одржи, када далеке будуће генерације буде збуњивало што смо ми могли разматрати либерализам а да нисмо разумели информацију и слично са другим социолошким теоријама.

Шире посматрајући феномен информације јасније је да је овде само загребано по њеној површини. Нема онаквих разрада, сада теорије физичке информације, о којима сам некада писао у књизи „Математичка теорија информације и комуникације“ (в. [11]), о капацитету канала, о Марковљевим ланцима, ергодичком извору, крипто кодовима, матрицама, а требало би. Нема ни квантне механике, такође, јер је присуство информације у материјалном свету толико доминантно да је једна књига о већини њених аспеката немогућ посао. Заправо чудно је да данас изгледа превише изложеног онога што ће у овој књизи некада изгледати премало.

Растко Вуковић, 7. априла 2019. године, проф. математике сликан за пано са својим ученицима, матурантима IV-4 општег смера Гимназије Бања Лука.

Друга мишљења

Теме којима се бавим су претешке за аутсајдере, а превише алтернативне за људе из моје струке, па сам увек био нарочито захвалан оним ретким појединцима који би се успели озбиљније „носати“ са њима. Зашто ће ти толики рецензенти – када ме питају кажем – ето одговора, то су можда једини људи који уопште хоће да пажљиво читају и евентуално разумеју ово што пишем.

Наравно, са „другим мишљењима“ академски брањеним нисам комуницирао само путем хладних, сувопарних завршних текстова, него и на мало живље начине. Без тих расправа бих се тешко уопште одлучио на штампање ове и претходних књига, а надам се да се из коментара који следе наслућују и такви детаљи.

Драгана Галић

Информација је постала релевантан појам за све науке које се баве симболичком комуникацијом. Појам информације није лако схватити нити једноставно протумачити, јер све науке још увијек трагају за поставкама све те комплексности. Информација разрјешава неизвјесност. Што је више неизвјесан догађај, више информације је треба за реализацију његове извјесности. Несигурност догађаја мјери се вјероватноћом настанка исхода.

Аутор нам у првом дијелу приступа објашњењу и интерпретацији појмова слободе, живота, једнакости, либерализма, феминизације на свој оригиналан филозофски начин. Како сам аутор каже тај дио је: „разрада посљедица примјене нове информације на друштвене појаве“.

У другом дијелу књиге спомиње Хартлијеву и Шенонову информацију коју смо имали прилике видјети у ауторовом дјелу „Простор-време“ из 2017. године. Користи познате појмове и теореме из теорије вјероватноће и наводи веома занимљиве примјере (аеродром, карте, коцка за игру, гласање, музика, квиз ...). Разликује физичку од класичне информације. Наиме, назив „физичка информација“ у складу је са законом одржања за који аутор претпоставља да важи у свијету физике.

Доказивање нових теореме на два начина, елементарно и помоћу извода, сматрам веома занимљивим. Једна од таквих је Теорема о физичкој информацији расподјеле. Веома вјешто користи разне математичке формуле из области математичке анализе. Користи познате појмове биномне расподјеле, математичко очекивање, дисперзију, варијансу, густину расподјеле те их повезује са новим до сада недоказаним теоремама.

Аутор се веома добро сналази како у областима математике, тако и у области физике. Сагледава везу природних појава кроз вероватноћу и информацију.

Д. Галић, 31.05.2019.

Duško Milinčić – O svijesti i informaciji

Evo, već treći put se u osvrtima na knjige kolege Rastka Vukovića pozivam na poznatog američkog matematičara Gregorija Čejtina (Gregory Chaitin). Ovaj put pridružiće nam se i Dejvid Čalmers (David John Chalmers), australijski filozof i kognitivni naučnik koji se uglavnom bavi onim što se na engleskom jeziku naziva philosophy of mind (što bismo mogli prevesti kao filozofija uma ili možda filozofija svijesti), a takođe i filozofijom jezika. Naime, Čejtin u jednom svom članku komentariše poznatu Čalmersovu knjigu iz 1996 godine „Svjesni um“ (eng. The Conscious Mind) i još neke njegove radove, a po mom mišljenju ova razmatranja mogu iz jednog drugačijeg ugla da osvijetle i stavove kolege Vukovića vezane za pojam informacije, odnosno fizičke informacije koju je on, izgleda, prvi definisao.

Dakle, o čemu se radi? U osnovi, Čalmers zastupa jednu verziju panpsihizma u kojoj identifikuje informaciju sa sviješću, a po kojoj svaki fizički sistem koji je u stanju da reprezentuje i procesira N bita informacije sadrži i N bita svijesti. On takođe podržava i tezu američkog kvantnog fizičara Džona Vilera (John Archibald Wheeler) poznatu po engleskoj frazi “It from bit” (što bismo mogli prevesti kao „nešto iz bita“) prema kojoj je informacija ontološki supstrat svijeta. Ovdje podsjećam da kolega Vuković, potpuno nezavisno, zastupa sličnu, ako ne i istu tezu već više od dvadeset godina. Čalmers, nadalje, povezuje kvantnu mehaniku (koja predstavlja pomak od materijalističke ka idealističkoj fundamentalnoj teoriji fizičkog svijeta) sa sviješću. Ovdje valja naglasiti (što čine i Čejtin i Čalmers) da su ovo ipak samo spekulacije čija je svrha da podstaknu razmišljanje o ovim izuzetno teškim temama, ali i da se nose, pa eventualno i da prežive striktnu akademsku i skeptičnu kritiku.

Da vidimo šta bi bile posljedice Čalmersove panpsihičke pretpostavke. Prije svega, kombinujući digitalnu filozofiju sa Čalmersom, ako se univerzum sastoji od informacija, i ako su sve informacije svjesne, tada bi čitav univerzum bio svjestan i možda bi se mogao identifikovati sa božjim umom, imanentnog ali ne i transcendentnog Boga. Ovo se takođe može povezati sa Lajbnicovom (Leibniz) Monadologijom, idealističkom ontologijom po kojoj se univerzum sastoji od monada, individualnih umova sa različitim stepenima percepcije, sve do maksimalne monade, Boga, sa savršenom percepcijom. Ovo je analogno Čalmersovom argumentu za panpsihizam, argumentu po kontinuitetu. Ako ljudi i napr. psi imaju svijest, onda idući nadole, moraju je imati i ćelije i virusi, pa još dalje i neživi fizički sistemi poput termostata i strujnih prekidača. Ako nastavimo ići po ovoj skali kompleksnosti, izgleda neuvjerljivo da se svijest iznenada prekida, umjesto da se jednostavno njen stepen smanjuje.

Gregori Čejtin ovdje donekle polemiše sa Čalmersom i kaže da se njegov argument kontinuiteta takođe može obrnuti u suprotnom pravcu, pa se svijest može pripisati i porodicama, kompanijama i nacijama (kolektivna svijest različita od individualne svijesti), a takođe i kompjuterima, kompjuterskim mrežama i naravno čitavom Internetu. Nadalje, prema Čalmersovoj tezi, u svakoj osobi nije svjesno samo misleće biće najvišeg nivoa nego i njen imuni sistem, svaki organ, ćelija, pa i „nesvjesni“ um osobe, koji je zapravo u kompjutacionom (računskom) smislu i moćniji od svjesnog uma. Zapravo, tvrdi Čejtin, svjesni um operiše na ćelijskom ili neuronskom nivou i on je serijski, dok nesvjesni um operiše na molekularnom nivou (poput nekog DNK kompjutera) i visoko je paralelan.

Čejtin ovdje citira francuskog matematičara Adamara (Hadamard) koji je pisao o psihologiji kreacije u oblasti matematike, kao i neke studije u kojima se dokazuje da sportisti (napr. fudbaleri) reaguju brže nego što to njihov svjesni um može. Ovi radovi sugerišu da nesvjesni um procesira više bita informacije nego svjesni um. Svijest je poput uskog lijevka. Takođe, istraživanja sa ljudima koji imaju tzv. fotografsku memoriju su pokazala da oni imaju ogroman kapacitet pamćenja, kao napr. čuveni matematičar i fizičar Džon fon Noj-

man (John von Neumann) koji je navodno mogao da izrecituje unatrag bilo koju stranicu bilo koje knjige koju je ikad pročitao. Takođe, poznati su slučajevi vozača koji bi zaspali za volanom, ali su i dalje upravljali vozilom. Taj „ja“ koji je upravljao vozilom takođe bi morao, po Čalmersovom panpsihizmu, imati neku svijest.

Čalmers slijedi Šenonovu (Shannon) verziju teorije informacija koja razmatra diskretne informacije mjerene u bitima, a takođe i suptilnije kontinualne informacije koje bi, osim u prisustvu šuma, teorijski sadržavale, poput realnih brojeva beskonačne tačnosti, beskonačnu količinu informacije. Čejtin, kako ćemo vidjeti kasnije, odbacuje ovu posljednju vrstu informacije.

U suštini, Čejtin predlaže da umjesto Šenonove verzije informacije, ako već mislimo da identifikujemo svijest sa informacijom, uzmemo algoritamsku informaciju. Naime, procesiranje informacija u fizičkim sistemima je algoritamsko i odgovara nivou mišljenja. Napr. kompjuteri (ako su svjesni) misle veoma brzo, brže nego ljudski um/mozak.

Takođe, DNK je neka vrsta diskretnog algoritamskog programskog jezika, bliža načinu razmišljanja u algoritamskoj teoriji informacija nego statističkom načinu razmišljanja o informacijama u Šenonovoj teoriji informacija. Međutim, moguće je da fizički sistemi procesiraju qubite, a ne klasične bitove. Kvantna teorija informacija uči da se mjere qubiti informacije u fizičkom sistemu i da se vremenska evolucija svakog fizičkog sistema posmatra kao algoritamsko procesiranje informacija, tj. kao kvantna kompjutacija.

Čalmers primjećuje da usljed šuma, kontinualni fizički sistemi mogu reprezentovati samo konačnu količinu informacija (prisjetimo se ovdje Šenonove teoreme o kapacitetu kanala sa šumom). Ovo je veoma povoljno, pošto algoritamska teorija informacija ne operiše sa realnim brojevima, koji sadrže beskonačnu količinu informacija. Jer kako bismo onda mjerili količinu informacije, pa stoga i količinu svijesti?

Napomenimo još da ako odemo dalje od Čalmersovog argumenta, stižemo do tzv. holografskog principa i Bekenštajnove (Bekenstein) granice koji impliciraju da svaki fizički sistem može sadržavati samo konačni broj (klasičnih, ne kvantnih) bita informacije, koji opet raste sa površinom sistema, a ne sa njegovom zapreminom. Ovo bi moglo da sugeriše da je u nekom smislu fizički svijet zapravo dvodimenzionalan, a ne trodimenzionalan!

Grubo govoreći, razmišljanja o tome šta je iza Bekenštajnove granice, koja dolaze od pokušaja da se primijeni kvantna mehanika na crne rupe i razradi neka kvantno-mehanička verzija opšte relativnosti, idu otprilike ovako: U skladu sa kvantnom mehanikom, da bi se predstavila beskonačna količina informacije, moramo ići do ekstremno visokih energija (pošto precizna lokalizacija čestica i talasa odgovara ekstremno malim talasnim dužinama i stoga ekstremno visokim energijama po principu neodređenosti). Ali dobro lokalizovana ekstremno visoka energija odgovara, prema slavnoj Ajnštajnovoj (Einstein) jednačini $E = mc^2$, ekstremno velikoj masi što bi uzrokovalo kolaps u crnu rupu i nestanak sa vidika! Nadalje, čak i u klasičnoj fizici, nijedna fizička veličina nikada nije bila izmjerena sa tačnošću većom od 20 cifara (približno 60 bita) kao što je u svom radu „Informacija je fizička“ (eng. Information is physical) naglašavao Rolf Landauer. Bilo bi zanimljivo za neka dalja istraživanja uporediti koncepte kolege Vukovića o fizičkoj informaciji sa Landauerovim, a takođe i Čejtinovim konceptom algoritamske informacije!

Napredak kvantne teorije informacija posljednjih godina kao da potvrđuje i ojačava Čalmersovu intuiciju koja je povezala svijest sa teorijom informacija i kvantnom mehanikom. Zašto? Zato što u skladu sa novim viđenjima u kvantnoj mehanici se u stvari radi o novoj vrsti informacije, odnosno informacije i kvanti su zapravo, u izvjesnom smislu, jedno isto. Kvantna teorija informacija nije nova fizika, ali je radikalno različit način interpretiranja kvantne mehanike. Danas mnogi kursevi kvantne mehanike započinju ne više sa

Šredingerovom (Schroedinger) jednačinom već sa qubitom!

Treba naglasiti da je od pojave Čalmersove teze o panpsihizmu koja se oslanja na tezu "It from bit", ova doktrina koja se ponekad naziva digitalna fizika ili digitalna filozofija postala vrlo aktivno polje istraživanja. Neki od istraživača u ovoj oblasti su svakako bili inspirisani Džonom Vilerom i njegovim čuvenim "It from bit". Međutim, neki drugi kao što su Stiven Volfram (Stephen Wolfram) i Edvard Fredkin (Edward Fredkin) koje Čalmers nije citirao, imali su druge izvore inspiracije. Ovdje, bez pretjerivanja, ubrajam i kolegu Rastka Vukovića koji se, sasvim originalno i nezavisno, bavi ovim pitanjima već nekoliko decenija.

Digitalna filozofija i digitalna fizika ostaju aktivne ali ipak visoko spekulativne oblasti bez odlučnih rezultata. Čejtin smatra da je najspektakularniji noviji rad u ovoj oblasti posmatranje gravitacije kao entropijske sile gdje se prostor-vrijeme pojavljuje iz upletenosti (eng. entanglement) qubita i upućuje između ostalih radova posebno na ključni rad Erika Verlindea iz 2016 godine. Oni koji poznaju rad kolege Vukovića znaju da je on nezavisno došao do veoma sličnih rezultata. Jedna od interesantnih karakteristika ovih hipoteza je da daju alternativna objašnjenja (kojih inače ne nedostaje!) za misterioznu tamnu materiju (eng. dark matter).

Na kraju možemo reći da ovakva istraživanja ostaju vrlo živa i stimulativna, posebno u kontekstu digitalne filozofije koja pokušava da izgradi svijet od informacije i kompjutacije umjesto materije i energije.

D. Milinčić, 25.06.2019.

Александра Радић

У физици је познато да свијет око нас чини материја, која се јавља у облику супстанце и физичког поља. Међутим, посматрајмо сљедећи примјер. Ако посматрамо одређену звијезду на небу, она се нпр. помјера по небу за неколико степени за пар сати. То кретање потиче од ротације Земље. Из наше перспективе, са Земље, брзина звијезде при кретању по небу није велика. Међутим, ако размислимо, та звијезда се налази на огромној удаљености од неколико стотина свјетлосних година од Земље. Стога, удаљеност коју звијезда пређе у односу на нас је огромна, реда величине неколико свјетлосних година. Тако велика удаљеност у истом временском интервалу од неколико сати, даје брзине веће од брзине свјетлости, што према Ајнштајновној Специјалној теорији релативности није могуће.

Такође, релативност нам говори да брзина звијезде зависи од посматрача. Стога, посматрач на Земљи може рећи да се звијезда на тој удаљености креће брзином већом од брзине свјетлости, али други посматрач који је ван система Земље (негдје друго у Свемиру) може рећи да се звијезда не креће.

Ако размислимо, податак о положају звијезде добијамо помоћу фотона свјетлости, којима у овом случају требају стотине година да дођу до Земље. То значи да ми добијамо информацију о звијезди преко фотона. Односно, једина интеракција коју имамо са том звијездом су фотони, а они се крећу брзином свјетлости за све посматраче. Тако да иако кретање звијезде изгледа као да прелази брзину свјетлости, оно нема толики значај, јер се одвија на огромној удаљености од нас. Стога, горња граница брзине интеракције је брзина свјетлости.

Ако нам кретање изгледа као да је брже од свјетлости, то није од значаја, ако оно није узрочно повезано са догађајима у просторвремену. Тако да звијезда која се креће огромном брзином у односу на нас, се заправо креће заједно са остатком Свемира, те

се не приближава нити удаљава од нечег у Свемиру. Ово је један од бројних примјера у астрономији о привидном кретању брзином већом од брзине свјетлости.

Још неки од примјера су кретање сјенке предмета преко закривљене површине, или чак помјерањем ласера преко површине на огромној удаљености, гдје се тачка освјетљења може кретати брзином већом од брзине свјетлости. Али пренос информације се не може одвијати брзином већом од брзине свјетлости. Тада би информација могла да се преноси у прошлост, што би негирало каузалност и довело до парадокса.

У квантној механици постоји низ примјера о значају физичке информације, која је „кодирана" у самим честицама, што се представља таласном функцијом. Уопштено, информација је посљедица сваког догађаја и њена количина зависи од његове извјесности. Стога можемо рећи да је физичка информација још један дио свијета око нас, који је својство саме материје.

У класичном смислу, информација се може обрисати и копирати, али у квантном свијету не. Она се не може уништити нити створити, него се само може трансформисати из једног облика у други, што проистиче из теорема квантне механике. Могли бисмо на прву рећи да говоримо о закону одржања енергије или материје.

Информација настаје из природе, у одмјереним, мањим дозама, али као посљедица интеракције живих бића или субјеката. Али да ли она може „нестати", тј. да се деси супротан процес трансформације информације у неизвјесност? Интеракција или другачије речено „комуникација" супстанце са „празним" простором доводи до осциловања између извјесности и неизвјесности, тако да неизвјесност постаје информација.

Ако се информација изгуби из система при његовој интеракцији са околином, та информација се мора наћи у неком другом дијелу Свемира. Тест те теорије урађен је нуклеарном магнетном резонанцом. А још један тест је квантна телепортација, као и испаравање црне рупе. Још једна занимљива појава везана за физичку информацију је холографски Свемир. Идеја предложена деведесетих година, према којој је сва информација која чини тродимензионалну стварност садржана у дводимензионалном пољу. Све што видимо око нас потиче са равне дводимензионалне површине, као сам холограм или гледање 3D филма на платну у кинима, тј. добијамо илузију треће димензије.

Једина разлика је да можемо перципирати ту димензију, тј. додирнути предмете, те је из наше перспективе та пројекција реална. И овдје перцепција информације добија фокус. Сматра се да би ова теорија Свемира, уколико је тачна, могла коначно повезати Ајнштајнову теорију гравитације и квантну теорију.

А. Радић, 24.08.2019.

Bibliografija

[1] Растко Вуковић: *МИНИМАЛИЗАМ ИНФОРМАЦИЈЕ* – физичка информација и примене; Економски институт Бања Лука, 2020 (на чекању); (https://www.scribd.com/document/421087302/Minimalizam-informacije)

[2] Растко Вуковић: *БИНОМНА РАСПОДЕЛА* – Физичка информација 4; 27. фебруар 2019. (https://www.academia.edu/38450558/Binomna_raspodela)

[3] Растко Вуковић: *МНОГОСТРУКОСТИ* – Избори живог и неживог света; Економски институт Бања Лука, 2018. (https://archive.org/details/Mnogostrukosti)

[4] Cristian Farías, Victor A. Pinto & Pablo S. Moya: *What is the temperature of a moving body?*; Scientific Reports volume 7, Article number: 17657 (2017); (https://www.nature.com/articles/s41598-017-17526-4)

[5] Растко Вуковић: *КВАНТНА МЕХАНИКА* – репрезентација континуума – метричког и векторског простора; књига је завршена 26 априла 2018. (https://www.scribd.com/document/366396575/Kvantna-mehanika)

[6] Растко Вуковић: *ПРОСТОР-ВРЕМЕ* – принципи физике случајности; Економски институт Бања Лука, мај 2017. (https://archive.org/details/Principi)

[7] Albert-László Barabási: *Network Science*, Cambridge University Press; 1 edition (August 5, 2016); ISBN-10: 1107076269

[8] Robert M. Gray: *Entropy and Information Theory*; First Edition, Corrected; Information Systems Laboratory; Electrical Engineering Department Stanford University; Springer-Verlag New York, 2000-2013. (https://ee.stanford.edu/~gray/it.pdf)

[9] Растко Вуковић: *ИНФОРМАЦИЈА ПЕРЦЕПЦИЈЕ* – слобода, демократија и физика; Економски институт Бања Лука, јуни 2016. (https://archive.org/details/Informacija)

[10] Albert R. Meyer: *Expectation & Variance*, Course Notes, Week 13, Massachusetts Institute of Technology, Mathematics for Computer Science, 2006. (https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall06/cos341/handouts/variance-notes.pdf)

[11] Растко Вуковић: *МАТЕМАТИЧКА ТЕОРИЈА ИНФОРМАЦИЈЕ И КОМУНИКАЦИЈЕ*, Друштво математичара Републике Српске, Бања Лука 1995.

[12] Zoran A. Ivković: *Teorija verovatnoća sa matematičkom statistikom*, Univerzitet u Beogradu; Izdavačko preduzeće Građevinska knjiga, Beograd, 1976.

[13] AFTAB, CHEUNG, KIM, THAKKAR, YEDDANAPUDI: *Information Theory*, INFORMATION THEORY AND THE DIGITAL AGE; 6.933 – FINAL PAPER. (`http://web.mit.edu/6.933/www/Fall2001/Shannon2.pdf`)

[14] Claude E. Shannon: *A Mathematical Theory of Communication*, Reprinted with corrections from The Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379–423, 623–656, July, October, 1948. (`http://math.harvard.edu/~ctm/home/text/others/shannon/entropy/entropy.pdf`)

Indeks

Ајнштајн, 24
Аровљева теорема, 17
Барабаши, 14
Бернули, 42
Болцман, 29, 40
Данинг-Кругеров ефекат, 15
Дарвин, 15
Ерланген, 24
Фаулхабер, 56
Фехнер, 34
Фуријеови редови, 24
Гаусова расподела, 46
Геделова теорема, 17
Гибс, 29
Хајзенберг, 25
Хартли, 34
Хилберт, 24
Карл Маркс, 14
Карноов циклус, 29
Келвин, 30
Клајн, 24
Клаузијус, 29
Лагранж, 25
Махов принцип, 21, 88
Минковски, 24
Неш, 14
Нетер, 24, 27
Нојман, 26
Ојлер, 25
Парондов парадокс, 27
Паулијев принцип забране, 21
Пуасонова расподела, 45
Расел, 15
Раселов парадокс, 17
Риманов интеграл, 46
Стирлингова формула, 46
Шенон, 35
Шварцшилд, 24
Тејлор, 37
Вебер, 34
аеродром, 62
агресивност, 27
акција, 29
алфабет, 42
апатија посматрача, 16
апроксимација, 46
атрактори, 24
бесконачност, 11, 37
бесконачост, 49
бинарна информација, 38
бинарно тражење, 36
биномна расподела, 42
    апроксимација, 45
    дисперзија, 44
    информација, 48
    очекивање, 43
    примери, 49
биологија, 12, 13, 35
бит, 47
богати, 20
богови, 22
будућност, 90
децит, 47
дефетизам, 27
дејство, 35, 90
дејство тактике, 27, 28
детерминизам, 21
диференцијабилност, 25
диктатура, 17, 19
дискретна информација, 38
дискретно, 22, 26, 27
дисперзија, 45, 70
доносити одлуке, 17
драж, 34
други закон термодинамике, 11
дуалности, 29

ефекат лептира, 24
економије, 24
експеримент, 11
    двоструки отвор, 21
еквилибријум, 14
енергија, 89
ентропија, 11, 20, 29, 40
    густине, 63
    није информација, 33
еволуција, 22, 26
факсимил, 41
фашизам, 17
фаза таласа, 81
феминизација, 11, 20, 41
фер новчић, 21, 49, 70
фикција, 35
физичка информација, 7, 20, 78
    биномне расподеле, 48
    индикатора, 76
    случајног хода, 88
фотон, 23
фронт таласа, 82
генералисане координате, 25
геометрија, 25
гласање, 60
глуви телефони, 14
густина, 51
хаос, 24
идеалан, 30
игре равнотеже, 27
индикатор, 68, 81
    информација, 71, 73, 76
    очекивање, 70, 72, 76
инерцијално кретање, 26
информација, 11, 89
    бинарна, 37
    дискретне троугаоне, 67
    густине, 63
    Хартлијева, 34
    површином, 34
    пренос, 35, 37
информација перцепције, 18
интелигенција, 13, 17
интерференција, 21, 90
инваријанта, 24
истина и лаж, 10
истине, 20
избори, 17
изометрија, 25
јединственост, 7
    принцип, 90
једнакост, 9, 14
капацитет канала, 35
карте, 41
казне, 18
колабирати, 22
компактан скуп, 27
комуникација, 37
комунизам, 17
концентратори, 14, 20
континуум, 33, 67
континуум много, 22
контрадикција, 10
конвергенција, 69
криминал, 18
критеријуми, 49
критична маса, 24
квантна механика, 23
    нотација, 43
квантно стање, 22
квиз, 62
лагранжијан, 25
либерализам, 9, 17
математичка индукција, 39
математичко очекивање, 43
микро-стање, 40
минимакс теорема, 26
мултиверзум, 22
музика, 41
начело шкртости, 16
нат, 47
неизвесност, 29, 30, 37
непрекидна променљива, 50
независни догађаји, 71
неживо биће, 79
нормална апроксимација, 50
нормална расподела, 51
    очекивање и варијанса, 53
    стандардна и општа, 52
нотација бројева, 36
нулто стање, 28
објективна случајност, 37
очекивана вредност, 69
одмазда, 19
оптимум, 28
организација, 79

осциловање молекула, 31
парадокс скупова, 11
паралелна реалност, 22, 66, 90
периодичност, 23, 26
погађање броја, 36
политичари, 19
поливалентна логика, 42
понављања, 23
понављање-до-колекције, 68
поремећај хомогености, 32
праг дражи, 34
правни систем, 9
правници, 19
пребројива бесконачност, 67
пребројиво много, 22
принцип информације, 7, 35, 41, 79
принцип јединствености, 21, 90
принцип најмање информације, 27
принцип најмањег дејства, 12, 25, 27
принцип различитости, 90
принципи информације, 20
принципи минимализма, 29
прошлост, 89
псеудо-реалност, 22
рад, 29
расподела вероватноћа, 42
равноправност, 9, 14, 20
реакција, 29
рефлексија, 25
рекурзија, 24
релације неодређености, 25
реверзибилност, 25
ротација, 25
садашњост, 90
симетрија, 25
синергија, 14
сиромашни, 20
слобода, 8, 17
слободан ход, 77
    фазе, 83
    фронта, 82
    очекивање фронта, 82
    очекивање корака, 79
    варијанса корака, 80
слободне мреже, 20, 23
социологија, 35
способни, 19
средња вредност, 79
стандардна девијација, 45
степени закон, 14
суперпозиција, 22
шест корака раздвајања, 14
тамна материја, 20
техника, 35
температура, 30
теорема непотпуности, 11
теорија хаоса, 7
теорија игара, 19, 27
теорија информације, 27
термодинамика, 29
топлота, 30
транслација, 25
тражење оштећеног, 36
трговина, 60
тријадно тражење, 36
троугаона расподела, 55
    дискретна, 56
    информација, 63
    континуална, 58
убиство, 19
униформна расподела, 61
    информација, 63
условна вероватноћа, 40
узајамна информација, 40
узрок, 37
вакуум, 27
варијанса, 44, 70
виртуелна честица, 88
вишак информације, 79
закон инерције, 32
закон о насиљу, 19
закон одржања, 7, 34
затвор, 19
живо биће, 12, 13, 79
живот, 12